

VILNIAUS UNIVERSITETO
TEORINĖS FIZIKOS IR ASTRONOMIJOS INSTITUTAS

Julius Ruseckas

**MATAVIMO MODELIAI KVANTINIŲ ZENONO IR
ANTI-ZENONO EFEKTŲ APRAŠYMU IR LAIKO
KVANTINĖJE MECHANIKOJE APIBRĖŽIMUI**

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, fizika (02 P), matematinė ir bendroji teorinė fizika,
klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija,
statistinė fizika, termodinamika (190 P)

Vilnius, 2006

Disertacija rengta 2002 – 2006 metais Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institute

Mokslinis vadovas

- prof. habil. dr. Bronislovas Kaulakys (Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Fizikos mokslo krypties taryboje.

Pirmininkas

- prof. habil. dr. Romualdas Karazija (Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)

Nariai:

- dr. Egidijus Norvaišas (Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)
- dr. Eugenijus Gaižauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)
- prof. habil. dr. Algirdas Matulis (Puslaidininkių fizikos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)
- dr. Vytautas Karpus (Puslaidininkių fizikos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, puslaidininkių fizika – 265 P)

Oponentai:

- prof. habil. dr. Adolfas Dargys (Puslaidininkių fizikos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)
- doc. dr. Gintaras Valiulis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)

Disertacija bus ginama viešame Fizikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2006 m. gruodžio 14 d. 15 val. Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institute, A. Goštauto g. 12, 01108 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2006 m. lapkričio 14 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje (Universiteto g. 3, 01513 Vilnius, Lietuva) ir Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos instituto bibliotekoje (A. Goštauto g. 12, 01108 Vilnius, Lietuva).

1 Įvadas

Kvantinėje mechanikoje yra dviejų tipų dinaminės taisyklės, naudojamos stebimai kvantinių būsenų evoliucijai aprašyti. Uždaroms sistemoms taikoma unitari evoliucija, nusakoma Schrödinger'io lygtimi. Tuo tarpu matuojama sistema patiria banginės funkcijos “kolapsą” arba “redukciją”. Toks dualistinis aprašymas buvo suvokiamas kaip problematiškas nuo pat kvantinės mechanikos kūrimo pradžios. Paskutiniaisiais metais, tobulėjant eksperimento technikai, matavimo problema pritraukia daugiau dėmesio. Nepaisant to, visiškas matavimų kvantinėje mechanikoje supratimas dar nėra pasiektas. Banginės funkcijos kolapsas aprašo tik idealizuotą matavimą, kuris yra momentinis ir be galo tikslus. Realūs matavimai projekciniu postulatu yra aprašomi tik apytiksliai.

Kai sistemos unitari Schrödinger'io dinamika yra sutrikdoma sąveikos su aplinka, svarbiausias efektas yra sistemos būsenų supynimas su aplinkos būsenomis. Dėl to yra sutrikdomi faziniai sąryšiai tarp sistemos būsenų. Šis procesas yra vadinamas dekoherencija. Nesant sąveikos su aplinka, sistemos būsenų priklausomybė nuo laiko nusakoma sistemos hamiltoniano. Tuo tarpu dažnai matuojamos sistemos evoliucija gali būti sulėtinta, net jei matavimai yra idealūs. Šis reiškinytis vadinamas kvantiniu Zenono efektu.

Paprasčiausia kvantinio Zenono efekto analizė nesinaudoja detalesniu matavimo proceso aprašymu. Ji yra paremta besikartojančia unitarios evoliucijos ir banginės funkcijos kolapsų seka. Vėliau buvo suprasta, kad dažni matavimai gali kvantinę dinamiką ne tik sulėtinti, bet ir pagreitinti. Šis pagreitinimas vadinamas kvantiniu anti-Zenono efektu.

Kvantiniai Zenono ir anti-Zenono efektai susilaukė daug dėmesio. Nors nagrinėjant Zenono efektą yra pasiekta didelė pažanga, jis dar nėra galutinai suprastas. Tikslesnėje kvantinio Zenono efekto analizėje tampa svarbi baigtinė matavimo trukmė, todėl projekcinis postulatas nėra pakankamas. Matavimas turi būti aprašomas išsamiau, į aprašymą įtraukiant detektorių bei sąveiką su aplinka.

Kita įdomi su matavimais kvantinėje mechanikoje susijusi idėja yra silpni matavimai, pasiūlyti Ahronov'o, Albert'o ir Vaidman'o. Jie parodė, kad net esant labai silpnai sąveikai su kvantine sistema, ir tik labai mažai sutrikdant kvantinės sistemos dinamiką, yra įmanoma gauti tam tikrą informaciją apie sistemą, vidurkinant per didelį identiškų sistemų ansamblį. Silpni matavimai yra kai kuriais aspektais labiau panašūs į matavimus klasikinėje mechanikoje ir gali būti naudojami nagrinėjant klausimus, kurie yra paprasti klasikinėje mechanikoje, tačiau sunkiai suformuluojami kvantinėje mechanikoje.

Vienas iš tokių klausimų yra tuneliavimo trukmės problema. Buvo daug bandymų įvertinti tuneliavimo proceso trukmę, tačiau ligi šiol nėra vienareikšmio atsakymo. Įvairios teorijos prieštarauja viena kitai. Kai kurios iš jų prognozuoja didesnę negu šviesos greitį tuneliavimo proceso spartą. Eksperimentų rezultatai dažnai yra nevienareikšmiai. Naudojant silpnus matavimus galima naujai pažvelgti į tuneliavimo trukmės problemą.

Kita susilaukusi dėmesio problema yra kvantinis atvykimo laiko aprašymas. Problema susijusi su tuo, kad dalelės atvykimas į apibrėžtą tašką erdvėje yra klasikinė sąvoka. Klasikinėje mechanikoje norint nustatyti trukmę, kurią dalelė praleidžia judėdama tam tikra trajektorija, reikia išmatuoti dalelės padėtį dviem skirtingais laiko momentais. Kvantinėje mechanikoje tokia matavimo procedūra negalima. Norint nusakyti atvykimo laiką kvantinėje

mechanikoje, reikia kitaip apibrėžti matavimo procedūrą.

Pagrindiniai darbo tikslai

1. Parodyti, kad kvantiniai Zenono ir anti-Zenono efektai gali būti suprasti naudojantis unitaria Schrödinger'io dinamika ir tam nereikia banginės funkcijos kolapso.
2. Išnagrinėti paprastus matavimo modelius, demonstruojančius kvantinius Zenono ir anti-Zenono efektus.
3. Išvesti bendrą formulę, nusakančią šuolio matavimo metu tikimybę, nesinaudojant banginės funkcijos kolapsu.
4. Palyginti dažnai matuojamos sistemos skilimo spartą, apskaičiuotą iš gautos formulės, su skilimo sparta apskaičiuota naudojant pilnesnius matavimo modelius, į aprašymą įtraukiančius detektoriaus sąveiką su aplinka.
5. Pasinaudojus silpnais matavimais ištirti tuneliavimo trukmės problemą.
6. Naudojantis silpnais matavimais nagrinėti atvykimo laiko kvantinėje mechanikoje problemą.

Mokslinis naujumas

1. Išnagrinėti paprasti matavimo modeliai, demonstruojantys kvantinius Zenono ir anti-Zenono efektus.
2. Pasiūlytas bendras formulės, nusakančios šuolio tikimybę matavimo metu, išvedimas.
3. Dažnai matuojamai skylančiai sistemai aprašyti panaudotas kvantinių trajektorijų metodas.
4. Įvesta išraiška trukmei, per kurią dydis turi nurodytą vertę su sąlyga, kad sistema yra rasta nurodytoje galinėje būsenoje.
5. Pasiūlyta išraiška atvykimo laiko tikimybės tankiui kvantinėje mechanikoje.

Ginamieji teiginiai

1. Kvantiniai Zenono ir anti-Zenono efektai gali būti aprašyti nesinaudojant banginės funkcijos kolapsu.
2. Dažni kvantinės sistemos matavimai gali sukelti tiek sistemos evoliucijos pagreitėjimą, tiek sulėtėjimą.
3. Bendra išraiška šuolio matavimo metu tikimybei, pirmą kartą gauta Kofman'o ir Kurizki, gali būti išvesta tik darant prielaidas kad matavimas yra netrikdantis ir kad detektoriaus dinamikai yra tinkama Markovo aproksimacija.

4. Dažnai matuojamos sistemos skilimo greitis, apskaičiuotas naudojantis bendra formule, gerai sutampa su skilimo greičiu, gautu iš skaitmeninio dažnai matuojamos dviejų lygmenų sistemos bei skylančios sistemos modeliavimo, parodant kvantinius Zenono ir anti-Zenono efektus.
5. Įvesta išraiška trukmei, per kurią dydis turi nurodytą vertę su sąlyga, kad sistema yra rasta nurodytoje galinėje būsenoje. Parodyta, kad ši trukmė turi apibrėžtą vertę tik kai komutavimo sąlyga yra patenkinta. Priešingu atveju gali būti įvestos dvi charakteringos trukmės.
6. Tuneliavimo trukmė, nusakyta naudojantis silpnais matavimais, neturi apibrėžtos vertės.
7. Atvykimo laiko tikimybės tankis gali būti įvestas kvantinėje mechanikoje, naudojantis silpnais matavimais. Analogiškai kompleksinei tuneliavimo trukmei yra įvestas kompleksinis atvykimo laiko pasiskirstymas. Parodyta, kad yra apribojimas atvykimo laiko nustatymo tikslumui.

Asmeninis autoriaus indėlis

Autorius išvedė daugumą disertacijoje aprašytų analizinių rezultatų, taip pat atliko skaitmeninius skaičiavimus.

2 Darbo struktūra ir turinys

Disertacijos apimtis — 108 puslapiai. Joje yra 28 iliustracijos. Darbas susideda iš įvado, bendro matvimų kvantinėje mechanikoje aprašymo, dviejų skyrių, išvadų ir literatūros sąrašo.

2.1 Įvadas

Įvade suformuluotas darbo aktualumas, pagrindiniai darbo tikslai bei ginamieji teiginiai.

2.2 Matavimai kvantinėje mechanikoje

Šiame skyriuje yra apžvelgta bendra matvimų kvantinėje mechanikoje aprašymo metodika.

2.3 Kvantiniai Zenono ir anti-Zenono efektai

Šiame skyriuje yra analizuojami paprasti modeliai, aprašantys kvantinius Zenono bei anti-Zenono efektus.

2.3.1 Matuojamosios sistemos aprašymas

Nagrinėjame kvantinę sistemą, sudarytą iš dviejų dalių. Pirmoji sistemos dalis turi diskretinį energijos spektrą. Šios dalies hamiltonianas yra \hat{H}_0 . Kita sistemos dalis aprašoma hamiltonianu \hat{H}_1 . Hamiltonianas \hat{H}_1 komutuoja su \hat{H}_0 . Atskiru atveju antros dalies gali nebūti, t.y. \hat{H}_1 gali būti lygus nuliui. Operatorius $\hat{V}(t)$ sukelia šuolius tarp skirtingų \hat{H}_0 lygmenų. Tokiu būdu, pilnas sistemos hamiltonianas yra $\hat{H}_S = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{V}(t)$. Tokios sistemos pavyzdys yra atomas su hamiltonianu \hat{H}_0 sąveikaujantis su elektromagnetiniu lauku, aprašomu \hat{H}_1 , o sąveika tarp atomo ir lauko nusakoma operatoriaus $\hat{V}(t)$.

Bus nagrinėjami matavimai, parodantys kurioje hamiltoniano \hat{H}_0 tikrinėje būsenoje yra sistema. Matavimas atliekamas sistemai sąveikaujant su detektoriumi. Pilnutinis sistemos ir detektoriaus hamiltonianas yra

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_D + \hat{H}_I, \quad (2.1)$$

kur \hat{H}_D yra detektoriaus hamiltonianas ir \hat{H}_I aprašo sąveiką tarp detektoriaus ir matuojamos sistemos. Galime pasirinkti būsenų bazę $|n\alpha\rangle = |n\rangle \otimes |\alpha\rangle$ bendrą abiem operatoriams \hat{H}_0 ir \hat{H}_1 ,

$$\hat{H}_0|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (2.2)$$

$$\hat{H}_1|\alpha\rangle = E_\alpha|\alpha\rangle, \quad (2.3)$$

kur n numeruoja hamiltoniano \hat{H}_0 tikrines būsenas, α atitinka visus likusius kvantinius skaičius.

2.3.2 Paprastas matavimo modelis ir kvantinis Zenono efektas

Iš pradžių nagrinėjamas pats paprasčiausias matavimo modelis.

Pilnai kvantinio Zenono efekto analizei reikia tikslesnio matavimo modelio, negu projekcinis postulatas. Šio skyriaus tikslas yra nagrinėti paprastą matavimo modelį. Modelis aprašo baigtinės trukmės ir baigtinio tikslumo matavimą. Nors jis ir neįtraukia negrįžtamų procesų, tačiau veda prie teisingos koreliacijos tarp matuojamos sistemos ir detektoriaus būsenų.

Dėl baigtinės matavimo trukmės be galo dažni matavimai nėra įmanomi. Didžiausias dažnumas yra tada, kai matavimai atliekami vienas po kito, be laisvos sistemos evoliucijos tarp matavimų. Todėl bus nagrinėjama tokia matavimų seka.

Operatorių \hat{H}_I , aprašantį sąveiką tarp matuojamosios sistemos ir detektoriaus, pasirenkame tokio pavidalo:

$$\hat{H}_I = \lambda \hat{q} \hat{H}_0, \quad (2.4)$$

kur \hat{q} yra detektoriaus Hilberto erdvėje veikiantis operatorius ir parametras λ atspindi sąveikos stiprumą. Tam, kad matavimas būtų tinkamai aprašomas, parametras λ turi būti didelis.

Prieš sąveiką su matuojama sistema detektorius yra grynojoje būsenoje $|\Phi\rangle$. Matavimo trukmė yra τ . Toliau, dėl paprastumo, nepaisysime detektoriaus hamiltoniano.

Matavimo trukmės įverčiui, iš pradžių nagrinėjamas atvejis, kai trikdys \hat{V} lygus nuliui.

Tikimybė, kad sistemą rasime $|n\rangle$ būsenoje, yra

$$P(n) = \sum_{\alpha} \langle n, \alpha | \hat{\rho}_S(0) | n, \alpha \rangle. \quad (2.5)$$

Įvedant detektoriaus būsenos vektorius

$$|\Phi_E\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \lambda \tau E \hat{q}\right) |\Phi\rangle \quad (2.6)$$

galima detektoriaus tankio matricą išreikšti taip:

$$\hat{\rho}_D(\tau) = \sum_n |\Phi_{E_n}\rangle \langle \Phi_{E_n}| P(n). \quad (2.7)$$

Matavimas yra užbaigtas, kai būsenos $|\Phi_E\rangle$ yra beveik ortogonalios. Dviejų būsenų $|\Phi_{E_1}\rangle$, atitinkančių skirtingas sistemos energijas E_1 ir E_2 , skaliarinė sandauga yra

$$\langle \Phi_{E_1} | \Phi_{E_2} \rangle = F(\lambda \tau \omega_{12}). \quad (2.8)$$

Matuojamosios sistemos tankio matricos nediagonaliniai elementai tikrinių funkcijų bazėje $\rho_{m,n}$ po matavimo yra padauginami iš $F(\lambda \tau \omega_{mn})$.

Kadangi būsenos $|\Phi\rangle$ yra normuotos, funkcija $F(\nu)$ artėja prie nulio didėjant $|\nu|$. Egzistuoja toks C , kad funkcija $|F(\nu)|$ yra maža jei $|\nu| > C$. Todėl galime matavimo paklaidą ΔE įvertinti kaip

$$\lambda \tau \Delta E \gtrsim \hbar C. \quad (2.9)$$

Tokiu būdu, matavimo trukmė turi tenkinti sąlygą

$$\tau \gtrsim \frac{\hbar}{\Lambda \Delta E}, \quad (2.10)$$

kur

$$\Lambda = \frac{\lambda}{C}. \quad (2.11)$$

Į trikdžio operatoriaus \hat{V} įtaką atsižvelgiame naudojantis trikdžių teorija kai λ yra didelis. Šuolio iš lygmens $|i\alpha\rangle$ į lygmenį $|f\alpha_1\rangle$ matavimo metu tikimybė yra $W(i\alpha \rightarrow f\alpha_1)$. Jai gaunama išraiška

$$W(i\alpha \rightarrow f\alpha_1) = \frac{2\pi\tau}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{f\alpha_1, i\alpha}(\omega) P_{if}(\omega) d\omega, \quad (2.12)$$

kur

$$P_{if}(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\tau F(\lambda\omega_{if}t) \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \exp(i(\omega - \omega_{if})t) dt. \quad (2.13)$$

Iš (2.13) lygties, naudojantis lygybe $F(0) = 1$, seka

$$\int P_{if}(\omega) d\omega = 1. \quad (2.14)$$

Dydis G yra

$$G_{f\alpha_1, i\alpha}(\omega) = \hbar |V_{f\alpha_1, i\alpha}|^2 \delta(E_1(f, \alpha_1) - E_1(i, \alpha) - \hbar\omega). \quad (2.15)$$

Jei hamiltonianas $\hat{H}_1 = 0$, hamiltonianas \hat{H}_0 turi diskretinį spektrą, o trikdžio operatorius \hat{V} nepriklauso nuo laiko, dažnai matuojamos sistemos tankio matricos diagonaliniai elementai kinta pagal eksponentinį dėsnį.

Toliau nagrinėjama skylanti sistema. Dalis su hamiltonianu \hat{H}_1 atitinka turintį tolydų spektrą rezervuarą. Jei matavimai neatliekami, tokioje sistemoje vyksta eksponentinis skilimas. Skilimo greitis yra nusakomas auksine Fermi taisykle

$$R(i\alpha_1 \rightarrow f\alpha_2) = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{f\alpha_2, i\alpha_1}|^2 \rho(\hbar\omega_{if}), \quad (2.16)$$

kur $\rho(E)$ yra rezervuaro būsenų tankis. Esant dažniams matavimams, šuolio iš būsenos i į būseną f tikimybė yra

$$W(i \rightarrow f; \tau) = \frac{2\pi\tau}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{fi}(\omega) P_{if}(\omega) d\omega, \quad (2.17)$$

kur

$$G_{fi}(\omega) = \hbar \rho(\hbar\omega) |V_{fE_\alpha = \hbar\omega, i0}|^2. \quad (2.18)$$

(2.17) lygtis parodo universalų rezultatą: dažnai matuojamos skylančios sistemos skilimo greitis yra nusakomas rezervuaro spektro ir matavimo pakeisto lygmens pločio persiklojimu. Ši lygtis pirmą kartą buvo išvesta Kofman'o ir Kurizki [1], naudojantis projekciniu postulatu. Parodėme, kad (2.17) lygtis tinka ir labiau realistiškiems matavimo modeliams.

Priklausomai nuo rezervuaro spektro $G(\omega)$ ir sąveikos su detektoriumi stiprumo, gali būti gautas tiek skilimo sulėtėjimas, tiek pagreitėjimas. Jei sąveika su detektoriumi silpna ir spektrinės linijos plotis yra daug mažesnis už rezervuaro spektro plotį, skilimo greitis yra lygus nematuojamos sistemos skilimo greičiui, nusakomam (2.16) auksinės Fermi taisyklės. Tarpiniu atveju, kai spektrinės linijos plotis yra mažas palyginus su atstumu tarp ω_{if} ir artimiausio rezervuaro spektro maksimumo, skilimo sparta didėja didėjant parametru Λ . Tai sąlygoja anti-Zenono efektą.

Jei spektrinės linijos plotis yra didesnis negu rezervuaro spektro plotis bei atstumas tarp ω_{if} ir rezervuaro spektro centro, skilimo greitis didėja, didėjant parametru Λ . Gaunamas kvantinis Zenono efektas. Tokiu atveju skilimo greitis nepriklauso nuo rezervuaro spektro pavidalo ir yra atvirkščiai proporcingas sąveikos su detektoriumi stiprumui Λ .

2.3.3 Laisva evoliucija ir matavimai

Šiame skyriuje nagrinėjamas atvejis, kai tarp dviejų matavimų yra tarpas su laisva sistemos evoliucija. Laisvos evoliucijos trukmė yra $T - \tau$. Matavimai, kurių trukmė τ , su po jų sekančia trukmės $T - \tau$ laisva evoliucija kartojami daug kartų.

Naudojantis trikdžių teorija, gauta išraiška šuolio tikimybei $W(i\alpha \rightarrow f\alpha_1)$. Ši tikimybė susideda iš trijų dalių:

$$W(i\alpha \rightarrow f\alpha_1) = W_F(i\alpha \rightarrow f\alpha_1) + W_M(i\alpha \rightarrow f\alpha_1) + W_{\text{Int}}(i\alpha \rightarrow f\alpha_1), \quad (2.19)$$

kur W_F yra šuolio laisvos evoliucijos metu tikimybė, W_M yra šuolio matavimo metu tikimybė ir W_{Int} yra interferencinis narys. Šioms tikimybės išreiškiamos taip:

$$W_F(i\alpha \rightarrow f\alpha_1) = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^{T-\tau} dt_1 \int_0^{T-\tau} dt_2 V_{f\alpha_1, i\alpha}(t_1 + t_0 + \tau) V_{i\alpha, f\alpha_1}(t_2 + t_0 + \tau) \times \exp(i\omega_{f\alpha_1, i\alpha}(t_1 - t_2)), \quad (2.20)$$

$$W_M(i\alpha \rightarrow f\alpha_1) = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\tau dt_1 \int_0^\tau dt_2 V_{f\alpha_1, i\alpha}(t_1 + t_0) V_{i\alpha, f\alpha_1}(t_2 + t_0) \times \exp(i\omega_{f\alpha_1, i\alpha}(t_1 - t_2)) F(\lambda\omega_{fi}(t_1 - t_2)), \quad (2.21)$$

$$W_{\text{Int}}(i\alpha \rightarrow f\alpha_1) = \frac{2}{\hbar^2} \text{Re} \int_0^\tau dt_1 \int_\tau^T dt_2 V_{f\alpha_1, i\alpha}(t_1 + t_0) V_{i\alpha, f\alpha_1}(t_2 + t_0) \times \exp(i\omega_{f\alpha_1, i\alpha}(t_1 - t_2)) F(\lambda\omega_{if}(\tau - t_1)). \quad (2.22)$$

Anksčiau nagrinėtai dviejų lygmenų sistemai, jei $T \gg \tau$ ir $\Delta\omega T \ll 1$ gaunama šuolio tikimybė

$$W(0 \rightarrow 1) = \frac{|v|^2 T^2}{\hbar^2} \frac{1}{4} + \frac{|v|^2 T}{\hbar^2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Lambda\omega} - \tau \right). \quad (2.23)$$

Pirmasis narys atitinka šuolio tikimybę esant idealizuotiems matavimams, antrasis narys yra pataisa dėl baigtinės matavimo trukmės.

2.3.4 Bendra išraiška kvantiniams Zenono ir anti-Zenono efektams

Šiame skyriuje nagrinėjami kvantiniai Zenono ir anti-Zenono efektai nekonkretizuojant matavimo modelio ir darant nedaug prielaidų. Gaunama bendra išraiška šuolio matavimo metu tikimybei.

Pradinė matuojamos sistemos tankio matrica yra $\hat{\rho}_S(0)$, pradinė detektoriaus tankio matrica yra $\hat{\rho}_D(0)$. Prieš matavimą matuojamoji sistema ir detektorius yra nekoreliuoti, todėl pilna matuojamosios sistemos ir detektoriaus tankio matrica yra $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_D(0)$. Matavimo trukmė yra τ .

Kai yra atsižvelgiama į detektoriaus sąveiką su aplinka, matuojamosios sistemos ir detektoriaus evoliucija negali būti aprašyta unitariu operatoriumi. Bendresnis aprašymas, leidžiantis atsižvelgti į sąveiką su aplinka, gali būti gautas naudojant superoperatorius. Matuojamosios sistemos ir detektoriaus evoliucija yra aprašoma superoperatoriumi $\mathcal{S}(t)$. Konkreti superoperatoriaus $\mathcal{S}(t)$ išraiška gali būti gauta iš konkretaus matavimo modelio.

Dėl baigtinės matavimo trukmės be galo dažni matavimai yra neįmanomi. Didžiausias dažnumas yra tada, kai matavimai atliekami vienas po kito. Todėl nuolatinį matavimą

modeliuosime kaip baigtinės trukmės ir baigtinio tikslumo matavimų seką. Po N matavimų pilna matuojamosios sistemos ir detektoriaus tankio matrica yra

$$\hat{\rho}(N\tau) = \mathcal{S}(\tau)^N \hat{\rho}(0). \quad (2.24)$$

Laikysime, kad detektoriaus tankio matrica $\hat{\rho}_D(0)$ yra tokia pat prieš kiekvieną matavimą. Tai reiškia, kad matavimo pakeista detektoriaus būseną yra atstatoma prieš kiekvieną matavimą arba kiekvienas matavimas yra atliekamas su nauju detektoriumi.

Iš pradžių nagrinėjamas atvejis, kai trikdys \hat{V} yra lygus nuliui.

Nagrinėsime netrikdantį matavimą [2–5]: matavimas nekeičia matuojamosios sistemos būsenos, jei iš pradžių sistema yra hamiltoniano \hat{H}_0 tikrinėje būsenoje. Esant tokiai prielaidai, bendriausias superoperatoriaus $\mathcal{S}(\tau)$ pavidalas yra

$$\mathcal{S}(\tau)[|n\alpha\rangle\langle m\alpha'| \otimes \hat{\rho}_D(0)] = |n\alpha\rangle\langle m\alpha'| e^{i\omega_{m\alpha',n\alpha}\tau} \otimes \mathcal{S}_{n\alpha,m\alpha'}(\tau) \hat{\rho}_D(0), \quad (2.25)$$

kur superoperatorius $\mathcal{S}_{n\alpha,m\alpha'}(\tau)$ veikia tik į detektoriaus tankio matricą. Matuojamosios sistemos tankio matricos nediagonaliniai matriciniai elementai po matavimo $(\rho_S)_{n\alpha,m\alpha'}(\tau)$ yra padauginami iš dydžio

$$F_{n\alpha,m\alpha'}(\tau) \equiv \text{Tr}\{\mathcal{S}_{n\alpha,m\alpha'}(\tau) \hat{\rho}_D(0)\}. \quad (2.26)$$

Kadangi po matavimo matuojamosios sistemos tankio matricos nediagonaliniai matriciniai elementai turi būti maži (lygūs nuliui idealiu atveju), $F_{n\alpha,m\alpha'}(\tau)$ turi būti mažas, kai $n \neq m$.

Operatoriaus \hat{V} įtaka įskaitoma naudojantis trikdžių teorija, laikant kad sąveika tarp detektoriaus ir matuojamosios sistemos yra stipri ir matavimo trukmė yra maža.

Laikome, kad detektoriumi galioja Markovo aproksimacija, t.y. matuojamosios sistemos ir detektoriaus evoliucija priklauso tik nuo jų būsenos esamu laiko momentu. Tada superoperatorius \mathcal{S} , aprašantis matuojamosios sistemos ir detektoriaus evoliuciją, tenkina lygtį

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{S} = \mathcal{L}(t) \mathcal{S}, \quad (2.27)$$

kur \mathcal{L} yra Liouville'io operatorius. Galime užrašyti $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_V$, kur \mathcal{L}_V yra mažas trikdys. Nagrinėjamu atveju

$$\mathcal{L}_V(t) \hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{V}(t), \hat{\rho}]. \quad (2.28)$$

Nuliniu artėjimu, kai trikdys neįskaitomas, evoliucija yra aprašoma superoperatoriumi

$$\mathcal{S}^{(0)}(t, t_0) = T \exp \left(\int_{t_0}^t \mathcal{L}_0(t') dt' \right). \quad (2.29)$$

Gaunama išraiška šuolio matavimo metu tikimybei

$$\begin{aligned} W(i\alpha \rightarrow f\alpha') &= \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \text{Tr} \left\{ \left(V_{f\alpha',i\alpha}(t_1) V_{i\alpha,f\alpha'}(t_2) \mathcal{S}_{i\alpha,f\alpha'}^{(0)}(t_1, t_2) e^{i\omega_{f\alpha',i\alpha}(t_1-t_2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + V_{f\alpha',i\alpha}(t_2) V_{i\alpha,f\alpha'}(t_1) \mathcal{S}_{f\alpha',i\alpha}^{(0)}(t_1, t_2) e^{i\omega_{i\alpha,f\alpha'}(t_1-t_2)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{S}_{i\alpha,i\alpha}^{(0)}(t_2, 0) \hat{\rho}_D(0) \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

(2.30) lygtis leidžia suskaičiuoti šuolio matavimo metu tikimybę, jei yra žinoma nesutrikdytos sistemos evoliucija. $\mathcal{S}_{n\alpha,m\alpha'}^{(0)}$ superoperatoriaus išraiška gali būti gauta iš konkretaus matavimo modelio. Pagrindinės prielaidos, darytos išvedant (2.30) lygtį, yra (2.25) bei (2.27)

lygtys, t.y. prielaidos, kad kvantiniai matavimai yra netrikdantys ir kad galioja Markovo aproksimacija. Taigi, (2.30) lygtis yra gana bendra.

Jei trikdžio operatorius \hat{V} nepriklauso nuo laiko t , (2.30) lygtis gali būti užrašyta kaip

$$W(i\alpha \rightarrow f\alpha') = \frac{2\pi\tau}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{f\alpha',i\alpha}(\omega) P_{i\alpha,f\alpha'}(\omega) d\omega, \quad (2.31)$$

kur

$$P(\omega)_{i\alpha,f\alpha'} = \frac{1}{\pi\tau} \operatorname{Re} \int_0^\tau dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i(\omega - \omega_{if})(t_1 - t_2)} \operatorname{Tr} \{ \mathcal{S}_{i\alpha,f\alpha'}^{(0)}(t_1, t_2) \mathcal{S}_{i\alpha,i\alpha}^{(0)}(t_2, 0) \hat{\rho}_D(0) \} \quad (2.32)$$

ir

$$G_{f\alpha',i\alpha}(\omega) = |V_{i\alpha,f\alpha'}|^2 \delta \left(\frac{1}{\hbar} (E_{\alpha'} - E_\alpha) - \omega \right) \quad (2.33)$$

Jei galioja lygybė

$$\operatorname{Tr} \left\{ \mathcal{S}_{i\alpha,f\alpha'}^{(0)}(t_1, t_2) \mathcal{S}_{i\alpha,i\alpha}^{(0)}(t_2) \hat{\rho}_D(0) \right\} = \operatorname{Tr} \left\{ \mathcal{S}_{i\alpha,i\alpha}^{(0)}(t_2) \mathcal{S}_{i\alpha,f\alpha'}^{(0)}(t_1, t_2) \hat{\rho}_D(0) \right\} = F_{i\alpha,f\alpha'}(t_1 - t_2), \quad (2.34)$$

tada galime (2.32) lygtį supaprastinti:

$$P(\omega)_{i\alpha,f\alpha'} = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\tau \left(1 - \frac{u}{\tau} \right) F_{i\alpha,f\alpha'}(u) \exp(i(\omega - \omega_{if})u) du. \quad (2.35)$$

2.3.5 Detektoriaus temperatūros įtaka kvantiniam Zenono efektui

Šiame skyriuje nagrinėjamas konkretus matavimo modelis, atsižvelgiantis į detektoriaus sąveiką su aplinka. Tokiu atveju tampa įmanoma nagrinėti kitų detektoriaus parametrų įtaką matuojamosios sistemos evoliucijai. Analizuojama detektoriaus temperatūros įtaka matuojamai sistemai.

Dekoherencijai ir disipacijai aprašyti naudojama Lindblad'o pavidalo lygtis. Toks metodas leidžia atsižvelgti į disipatyvią dinamiką, prie lygties tankio matricai pridendant Lindblad'o disipacijos operatorius.

Kaip detektorius naudojamas harmoninis osciliatorius su hamiltonianu

$$\hat{H}_D = \hbar\Omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.36)$$

kur \hat{b} ir \hat{b}^\dagger yra sukūrimo ir išnykimo operatoriai. Sąveikos su matuojamąja sistema operatorių \hat{H}_I pasirenkame tokio pavidalo:

$$\hat{H}_I = \lambda \hat{q} \hat{H}_0, \quad (2.37)$$

kur $\hat{q} = \hat{b}^\dagger + \hat{b}$ ir parametras λ nusako sąveikos stiprumą.

Prieš matavimą detektorius yra temperatūros T šiluminėje pusiausvyroje. Todėl pradinė detektoriaus tankio matrica yra

$$\hat{\rho}_D(t_0) = \hat{\rho}_T = \exp \left(-\frac{\hbar\Omega \hat{n}}{k_B T} \right) \left(1 - \exp \left(-\frac{\hbar\Omega}{k_B T} \right) \right), \quad (2.38)$$

kur $\hat{n} = \hat{b}^\dagger \hat{b}$.

Lindblad'o pavidalo lygtis pilnai matuojamosios sistemos ir sąveikaujančio su aplinka detektoriaus tankio matricai yra

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + L_D[\hat{\rho}(t)], \quad (2.39)$$

kur

$$L_D[\hat{\rho}(t)] = \sum_{\mu} ([\hat{V}_{\mu} \hat{\rho}(t), \hat{V}_{\mu}^{\dagger}] + [\hat{V}_{\mu}, \hat{\rho}(t) \hat{V}_{\mu}^{\dagger}]) \quad (2.40)$$

bei \hat{V}_{μ} yra Lindblad'o disipacijos operatoriai. Šiame modelyje naudojame disipatyvaus slopinamos fazės osciliatoriaus lygtį, nagrinėjamą kvantinėje optikoje [6]. Tada Lindblad'o disipacijos operatoriai yra

$$\hat{V}_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \hat{b}^{\dagger} \hat{b}, \quad \hat{V}_2 = \sqrt{\frac{\gamma_{\uparrow}}{2}} \hat{b}^{\dagger}, \quad \hat{V}_3 = \sqrt{\frac{\gamma_{\downarrow}}{2}} \hat{b}. \quad (2.41)$$

Lygtis (2.39) tankio matricai tampa

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = & \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] + \frac{\gamma}{2} (2\hat{n}\hat{\rho}(t)\hat{n} - \hat{n}^2\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{n}^2) \\ & + \frac{\gamma_{\uparrow}}{2} (2\hat{b}^{\dagger}\hat{\rho}(t)\hat{b} - (\hat{n}+1)\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)(\hat{n}+1)) \\ & + \frac{\gamma_{\downarrow}}{2} (2\hat{b}\hat{\rho}(t)\hat{b}^{\dagger} - \hat{n}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{n}). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Tam, kad vyktų relaksacija į šiluminę pusiausvyrą, parametrai γ_{\uparrow} ir γ_{\downarrow} turi tenkinti sąlygą [7]

$$\gamma_{\uparrow} = \gamma_{\downarrow} \exp\left(-\frac{\hbar\Omega}{k_B T}\right). \quad (2.43)$$

(2.42) lygčiai spręsti naudojame charakteristinės funkcijos metodą [8]. Įvedame kvantinę charakteristinę funkciją [9]

$$\chi(\xi, \xi^*) = \text{Tr}\{\hat{\rho} e^{\xi \hat{b}^{\dagger}} e^{-\xi^* \hat{b}}\}. \quad (2.44)$$

Naudojantis trikdžių teorija, šuolio matavimo metu tikimybė gali būti išreikšta kaip

$$W(i\alpha \rightarrow f\alpha_1, t) = \frac{1}{\hbar^2} |V_{i\alpha, f\alpha_1}|^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (\chi_{i\alpha, f\alpha_1}(0, 0; t_1, t_2) + \chi_{f\alpha_1, i\alpha}(0, 0; t_1, t_2)), \quad (2.45)$$

kur

$$\chi_{i\alpha, f\alpha_1}(\xi, \xi^*; t_1, t_2) = \text{Tr}\{e^{\xi \hat{b}^{\dagger}} e^{-\xi^* \hat{b}} S_{i\alpha, f\alpha_1}^{(0)}(t_1 - t_2) S_{i\alpha, i\alpha}^{(0)}(t_2) \hat{\rho}_D\} \quad (2.46)$$

yra nauja charakteristinė funkcija. Jai gaunama išraiška

$$\begin{aligned} \chi_{i\alpha, f\alpha_1}(0, 0; t_1, t_2) = & \exp\left(-i\omega_{i\alpha, f\alpha_1}(t_1 - t_2)\right. \\ & + \lambda^2 \omega_{if} \frac{\omega_f - \omega_{if} \bar{n}(T)}{\gamma_{\text{eff}} - i\Omega} \left(t_1 - t_2 + \frac{1}{\gamma_{\text{eff}} - i\Omega} (e^{(i\Omega - \gamma_{\text{eff}})(t_1 - t_2)} - 1)\right) \\ & - \lambda^2 \omega_{if} \frac{\omega_i + \omega_{if} \bar{n}(T)}{\gamma_{\text{eff}} + i\Omega} \left(t_1 - t_2 + \frac{1}{\gamma_{\text{eff}} + i\Omega} (e^{-(i\Omega + \gamma_{\text{eff}})(t_1 - t_2)} - 1)\right) \\ & + \frac{\lambda^2 \omega_{if} \omega_i}{(\gamma_{\text{eff}} - i\Omega)^2} (1 - e^{(i\Omega - \gamma_{\text{eff}})t_2}) (1 - e^{(i\Omega - \gamma_{\text{eff}})(t_1 - t_2)}) \\ & \left. - \frac{\lambda^2 \omega_{if} \omega_i}{(\gamma_{\text{eff}} + i\Omega)^2} (1 - e^{-(i\Omega + \gamma_{\text{eff}})t_2}) (1 - e^{-(i\Omega + \gamma_{\text{eff}})(t_1 - t_2)})\right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

kur

$$\gamma_{\text{eff}} = \frac{1}{2}(\gamma + \gamma_{\downarrow} - \gamma_{\uparrow}). \quad (2.48)$$

Laikant, kad disipacija yra greita, t.y. disipacijos trukmė yra daug mažesnė už osciliautoriaus periodą, turime $\Omega \ll \gamma_{\text{eff}}$. Tada formulę šuolio tikimybei galima supaprastinti ir užrašyti pavidalu

$$W(i\alpha \rightarrow f\alpha_1, t) = \frac{2\pi t}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G_{f\alpha_1, i\alpha}(\omega) P_{if}(\omega), \quad (2.49)$$

kur

$$P_{if}(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^t du \left(1 - \frac{u}{t}\right) \exp(i(\omega - \omega_{if})u) \times \exp\left(-\frac{(1 + 2\bar{n}(T))\lambda^2\omega_{if}^2}{\gamma_{\text{eff}}} \left(u + \frac{1}{\gamma_{\text{eff}}}(e^{-\gamma_{\text{eff}}u} - 1)\right)\right). \quad (2.50)$$

Kai parametras λ yra didelis, tai (2.50) lygtyje į integralą duoda indėlių tik mažos u vertės, todėl $\exp(-\gamma_{\text{eff}}u)$ eksponentę galime išskleisti Teiloro eilute, paliekant tik pirmus tris narius. Tada gauname šuolių spartą

$$R(i\alpha \rightarrow f\alpha_1) \approx \frac{2|V_{i\alpha, f\alpha_1}|^2}{\hbar^2\lambda|\omega_{if}|} \sqrt{\frac{\pi}{2(1 + 2\bar{n}(T))}}. \quad (2.51)$$

Gauta sparta atvirkščiai proporcinga sąveikos su detektoriumi stiprumui λ . Sąveikos stiprumas į lygtį įeina padaugintas iš $\sqrt{1 + 2\bar{n}(T)}$. Tokiu būdu matavimo įtaka stiprėja, didėjant detektoriaus temperatūrai.

2.3.6 Kvantinių trajektorijų metodas kvantiniams Zenono ir anti-Zenono efektams aprašyti

Šiame skyriuje, naudojant kvantinių šuolių metodą [10], aprašoma detektoriaus, sąveikaujančio su aplinka, evoliucija. Kvantinių šuolių metodas naudojamas dažnai matuojamos sistemos evoliucijai aprašyti. Skaitmeniniai rezultatai palyginami su analiziškai gautomis skilimo spartomis.

Nagrinėjama sistema su hamiltonianu \hat{H}_0 , turinčiu dvi tikrines būsenas: pagrindinę $|g\rangle$ ir sužadintą $|e\rangle$.

Kaip detektorių naudojame atomą, turintį du lygmenis: sužadintą $|a\rangle$ ir pagrindinį $|b\rangle$. Detektoriaus hamiltonianas yra

$$\hat{H}_D = \frac{\hbar\Omega_D}{2}\hat{\sigma}_z. \quad (2.52)$$

Čia $\hbar\Omega_D$ nusako energijų skirtumą tarp lygmenų $|a\rangle$ ir $|b\rangle$, $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ yra Pauli matricos. Sąveikos su matuojamąja sistema operatorių \hat{H}_I pasirenkame tokio pavidalo:

$$\hat{H}_I = \hbar\lambda|g\rangle\langle g|(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-), \quad (2.53)$$

kur $\hat{\sigma}_{\pm} = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y)$. Parametras λ nusako detektoriaus sąveikos su matuojamąja sistema stiprumą. Detektuojantis atomas sąveikauja su elektromagnetiniu lauku. Atomo ir lauko sąveika aprašoma nariu

$$\mathcal{L}_D\hat{\rho}_D = -\frac{\Gamma}{2}(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}_D - 2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}_D\hat{\sigma}_+ + \hat{\rho}_D\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-), \quad (2.54)$$

kur Γ yra relaksacijos sparta.

Pusiausvyros atveju, kai nėra sąveikos su matuojamąja sistema, detektoriaus tankio matrica yra $\hat{\rho}_D(0) = |b\rangle\langle b|$.

Iš pradžių nagrinėjame atvejį, kai trikdys \hat{V} yra lygus nuliui.

Charakteringą matavimo trukmę τ_M galime įvertinti kaip trukmę, per kurią matuojamosios sistemos tankio matricos nediagonaliniai elementai tampa maži. Atomas gali būti efektyviu detektoriumi, kai sužadintos būsenos $|a\rangle$ relaksacijos sparta Γ yra didelė. Tokiu atveju lygtis detektoriaus tankio matricai galime išspręsti apytiksliai. Gauname

$$F_{e,g}(t) = \rho_{bb}(t) \approx \exp\left(-\frac{t}{\tau_M}\right), \quad (2.55)$$

kur

$$\tau_M = \frac{\Gamma}{2\lambda^2} \quad (2.56)$$

yra charakteringa matavimo trukmė. Matyti, kad matavimas yra trumpesnis esant didesniam sąveikos stiprumui λ .

Kvantinių šuolių modeliuose kvantinė trajektorija yra skaičiuojama integruojant nuo laiko priklausančią Schrödinger'io lygtį naudojant neermitinį efektyvųjį hamiltonianą. Į nekoherentinius procesus, tokius kaip spontaninė emisija, atsižvelgiama kaip į atsitiktinius kvantinius šuolius, sukeliančius banginės funkcijos kolapsą.

Pilnos sistemos dinamika yra aprašoma lygtimi

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) = (\mathcal{L} + \mathcal{J})\hat{\rho}, \quad (2.57)$$

kur

$$\mathcal{L}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}(\hat{H}_{\text{eff}}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}_{\text{eff}}^\dagger), \quad (2.58)$$

$$\mathcal{J}\hat{\rho} = \hat{C}\hat{\rho}\hat{C}^\dagger. \quad (2.59)$$

Operatoriai \hat{H}_{eff} bei \hat{C} bendru atveju yra neermitiniai. (2.57) lygtis gali būti interpretuojama tokiu būdu: per laiko intervalą Δt gali įvykti vienas iš dviejų procesų: kvantinis šuolis, aprašomas lygtimi

$$|\Psi_{\text{jump}}(t + \Delta t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\Psi(t)|\hat{C}^\dagger\hat{C}|\Psi(t)\rangle}}\hat{C}|\Psi(t)\rangle \quad (2.60)$$

su tikimybe

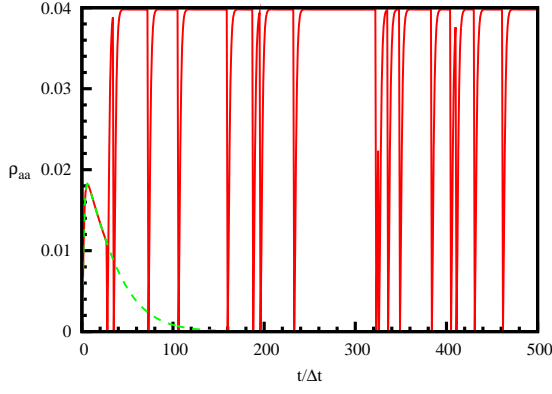
$$p_{\text{jump}}(t) = \langle\Psi(t)|\hat{C}^\dagger\hat{C}|\Psi(t)\rangle\Delta t \quad (2.61)$$

arba evoliucija su neermitiniu \hat{H}_{eff} hamiltonianu,

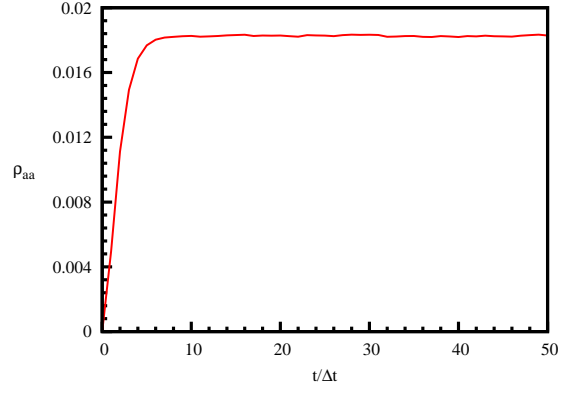
$$|\Psi_{\text{jump}}(t + \Delta t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\Psi(t)|\left(1 + \frac{i}{\hbar}(\hat{H}_{\text{eff}}^\dagger - \hat{H}_{\text{eff}})\Delta t\right)|\Psi(t)\rangle}}\left(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{eff}}\Delta t\right)|\Psi(t)\rangle. \quad (2.62)$$

Stochastiniai metodai buvo naudoti matavimo proceso skaitmeninei simuliacijai. Nagrinėjamu atveju šuolius aprašantis operatorius \hat{C} turi pavidalą

$$\hat{C} = \sqrt{\Gamma}\hat{\sigma}_-, \quad (2.63)$$



2.1 pav.: Tipiška detektoriaus kvantinė trajektorija. Parodyta tikimybė ρ_{aa} detektoriumi būti sužadintame lygmenyje. Iš-tisinė linija atitinka matuojamosios sistemos kolapsą į pagrindinę būseną, brūkšninė linija atitinka kolapsą į sužadintą būseną. Skaitmeniniams skaičiavimams naudo-ti parametrai yra: $\Delta t = 0,1$, $\Gamma = 10$, $\lambda = 1$, ir $\Omega_D = 1$.



2.2 pav.: Tikimybė detektoriumi būti su-žadintame lygmenyje, gauta suvidurkinus 1000 trajektorijų. Parametrai yra tokie patys, kaip ir 2.1 pav.

o efektyvusis hamiltonianas yra

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_D + \hat{H}_I - i\hbar\frac{\Gamma}{2}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-. \quad (2.64)$$

Skaitmeninei simuliacijai pasirinkta matuojamosios sistemos pradinė būsena $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$. Tipiškos detektoriaus kvantinės trajektorijos pavaizduotos 2.1 pav. Yra dviejų tipų trajek-torijos, atitinkančios matuojamosios sistemos kolapsą į sužadintą arba į pagrindinę būseną. Suvidurkinus pagal realizacijas tikimybė detektoriumi būti sužadintame lygmenyje yra pavaiz-duota 2.2 pav. Matuojamosios sistemos tankio matricos nediagonalinių matricinių elementų priklausomybė nuo laiko gerai atitinka eksponentinį dėsnį su charakteringa trukme iš (2.56) lygties.

Toliau nagrinėta matuojamoji sistema yra atomas, sąveikaujantis su išoriniu klasikiniu elektromagnetiniu lauku. Atomo sąveika su lauku yra aprašoma operatoriumi

$$\hat{V} = -\hbar\Omega_R(|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|)\cos\Omega t, \quad (2.65)$$

kur Ω yra lauko dažnis bei Ω_R yra Rabi dažnis.

Matuojamos sistemos evoliucija žymiai skiriasi nuo Rabi osciliacijų. Nagrinėjame atveji, kai matavimo trukmė τ_M yra daug mažesnė už Rabi osciliacijų periodą $2\pi/\Omega_R$. Tokiu atveju matuojamosios sistemos tankio matricos nediagonaliniai elementai lieka maži, ir diagonaliniai tankio matricos elementai kinta laike pagal eksponentinį dėsnį. Kai išderinimas $\Delta\omega$ yra nelygus nuliui, dažnai matuojamoje dviejų lygmenų sistemoje gali pasireikšti kvantinis anti-Zenono efektas: esant dažniams matavimams tikimybė būti pradinėje būsenoje yra mažesnė.

Toliau nagrinėjama skylanti sistema. Skylanti sistema modeliuojama kaip dviejų lygmenų sistema, sąveikaujanti su daug lygmenų turinčiu rezervuaru. Pilnas sistemos hamiltonianas yra

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{V}, \quad (2.66)$$

kur

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_{eg}|e\rangle\langle e| \quad (2.67)$$

yra dviejų lygmenų sistemos hamiltonianas,

$$\hat{H}_1 = \sum_k \hbar\omega_k|k\rangle\langle k| \quad (2.68)$$

yra rezervuaro hamiltonianas ir

$$\hat{V} = \hbar \sum_k (g(k)|e\rangle\langle k| + g(k)^*|k\rangle\langle e|) \quad (2.69)$$

aprašo sistemos sąveiką su rezervuaru. Dydžiai $g(k)$ nusako sąveikos su rezervuaro moda k stiprumą.

Skilimo sparta $\Gamma_{e \rightarrow g}^{(0)}$ yra nusakoma auksine Fermi taisykle:

$$\Gamma_{e \rightarrow g}^{(0)} = 2\pi\rho(\omega_{eg})|g(\omega_{eg})|^2. \quad (2.70)$$

Norint gauti kvantinį anti-Zenono efektą, reikia, kad dydžio $\rho(\omega)|g(\omega)|^2$ išvestinė būtų pakankamai didelė. Tokiu atveju (2.70) auksinė Fermi taisyklė yra netinkama. Tikslesnė išraiška skilimo spartai gali būti gauta, naudojant Laplaso transformacijos metodą [11].

Skaitmeniniuose skaičiavimuose naudojami rezervuaro dažniai ω pasiskirstę intervale $[\omega_{eg} - \Lambda, \omega_{eg} + \Lambda]$ pastoviais atstumais $\Delta\omega$. Todėl būsenų tankis yra konstanta $\rho(\omega) = 1/\Delta\omega \equiv \rho_0$. Paprasčiausias sąveikos stiprumo $g(\omega)$ pavidalas yra tiesinė priklausomybė nuo ω ,

$$g(\omega) = g_0 \left(1 + \frac{a}{\Lambda}(\omega - \omega_{eg}) \right), \quad (2.71)$$

kur a yra bedimensinis parametras.

Tada gauname skilimo spartą

$$\Gamma_{e \rightarrow g}^{(1)} \approx \Gamma_{e \rightarrow g}^{(0)} \left(1 - \frac{\Gamma_{e \rightarrow g}^{(0)}}{\pi\Lambda}(5a^2 - 1) \right). \quad (2.72)$$

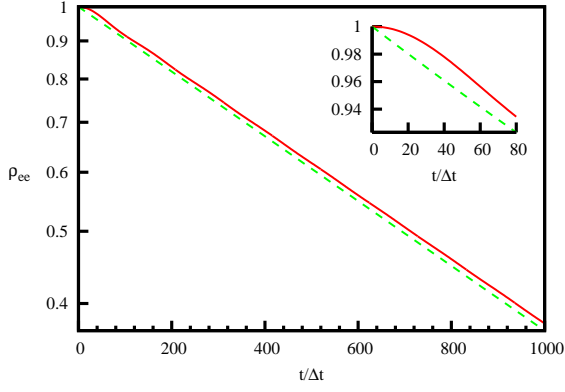
Lygtys, aprašančios sistemos evoliuciją, spręstos skaitmeniškai, jas diskretizuojant su žingsniu Δt . Skaičiavimams imta $N = 1000$ būsenų rezervuare. Rezultatai pastoviam sąveikos stiprumui $g(k) = g_0$ pavaizduoti 2.3 pav. Tarpiniams laikams matyti geras sutapimas su eksponentiniu skilimo dėsniu pagal auksinę Fermi taisyklę. Labai trumpiems laikams sužadintos būsenos užpilda nuo laiko priklauso kvadratiškai, kas sąlygoja kvantinį Zenono efektą.

Skaitmeniniai rezultatai tam atvejui, kai sąveikos su rezervuaro modomis stiprumas yra aprašomas (2.71) lygtimi su nelygiu nuliui parametru a , pavaizduoti 2.4 pav. Tarpiniams laikams matyti geras sutapimas su eksponentiniu skilimo dėsniu, su (2.72) skilimo sparta. Labai trumpiems laikams skilimas gali būti ir greitesnis. Šis pagreitinėjimas sąlygoja kvantinį anti-Zenono efektą.

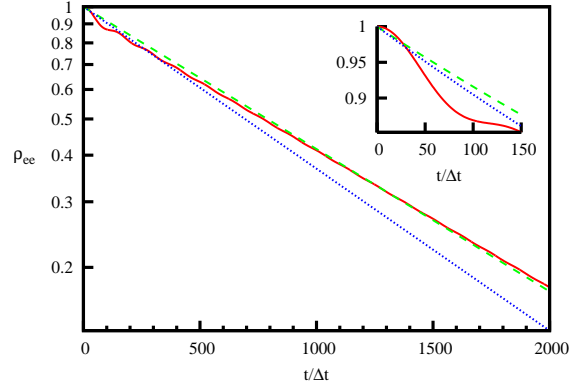
Toliau nagrinėjama skylančios sistemos sąveika su detektoriumi.

Naudodamiesi (2.31) lygtimi bei skleidami dydžio $(\Lambda\tau_M)^{-1}$ laipsnių eilute, gauname dažnai matuojamos skylančios sistemos skilimo greitį

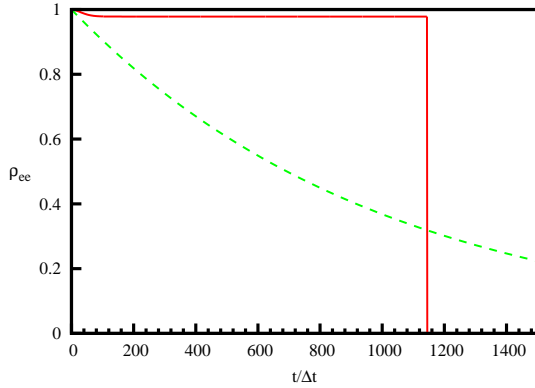
$$\Gamma_{e \rightarrow g} = \Gamma_{e \rightarrow g}^{(0)} \left(1 - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\Lambda\tau_M} + \dots \right). \quad (2.73)$$



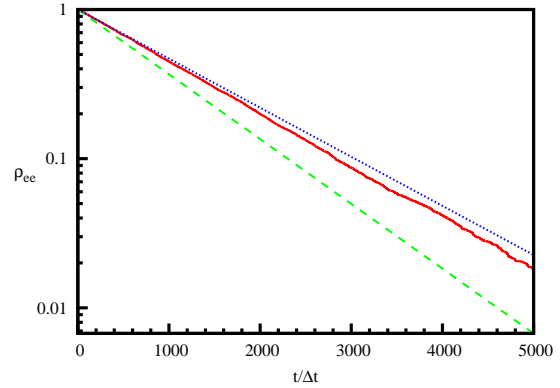
2.3 pav.: SkyLANčios sistemos sužadinto lygmens užpilda. Ištinė linija rodo skaitmeninio skaičiavimo rezultatus, brūkšninė linija vaizduoja eksponentinį skilimą pagal auksinę Fermi taisyklę. Skaičiavimams naudoti parametrai yra $\Delta t = 0,1$, $\Delta\omega = 0,001$, $\Lambda = 0,5$ ir $g_0 = 0,001262$. Esant tokiems parametrams, skilimo sparta yra $\Gamma_{e \rightarrow g}^{(0)} = 0,01$.



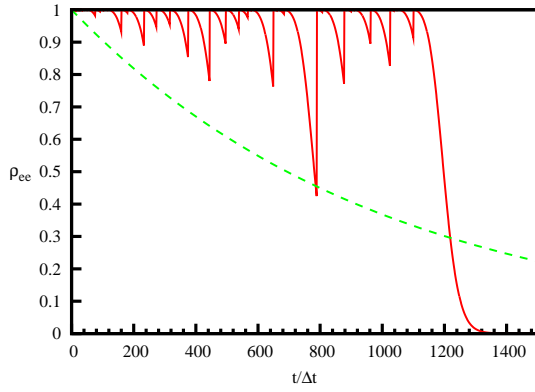
2.4 pav.: SkyLANčios sistemos sužadinto lygmens užpilda, kai sąveika su rezervuaro modomis aprašoma (2.71) lygtimi. Ištinė linija rodo skaitmeninio skaičiavimo rezultatus, brūkšninė linija vaizduoja eksponentinį skilimą su sparta iš (2.72) lygties, taškinė linija vaizduoja eksponentinį skilimą pagal auksinę Fermi taisyklę. Skaičiavimams naudota $a = 2$, o kiti parametrai tokie patys, kaip ir 2.3 pav.



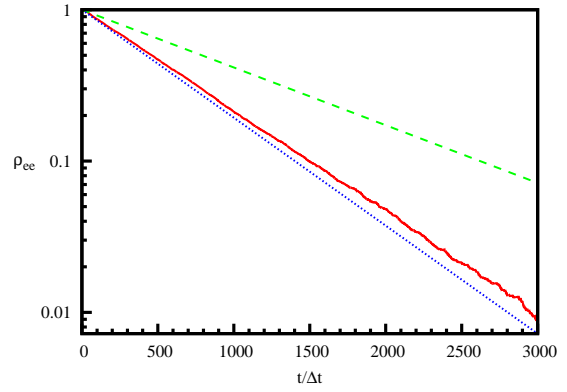
2.5 pav.: Tipiška dažnai matuojamos skyLANčios sistemos kvantinė trajektorija (ištinė linija), kai detektorius sąveikauja su matuojamosios sistemos pagrindine būsena. Parodyta tikimybė ρ_{ee} , kad matuojamas atomas yra sužadintame lygmenyje. Brūkšninė linija rodo eksponentinį skilimą pagal auksinę Fermi taisyklę. Skaitmeniniams skaičiavimams naudoti parametrai yra $\Delta t = 0,1$, $\Gamma = 10$, $\lambda = 1$, $\Omega_D = 1$, $\Delta\omega = 0,001$, $\Lambda = 0,5$, ir $g_0 = 0,001262$. Esant tokiems parametrams, skilimo sparta yra $\Gamma_{e \rightarrow g} = 0,01$.



2.6 pav.: SkyLANčios sistemos sužadinto lygmens užpildos priklausomybė nuo laiko. Ištinė linija rodo skaitmeninio skaičiavimo rezultata, brūkšninė linija rodo eksponentinį skilimą pagal auksinę Fermi taisyklę. Taškinė linija rodo aproksimaciją pagal (2.73) lygtį. Naudoti parametrai yra tokie patys, kaip ir 2.5 pav.



2.7 pav.: Tipiška dažnai matuojamos skylančios sistemos kvantinė trajektorija (ištininė linija), kai detektorius sąveikauja su sužadinta būseną. Pavaizduota tikimybė ρ_{ee} , kad matuojamas atomas yra sužadintoje būsenoje. Brūkšninė linija rodo eksponentinį skilimą pagal aukšinę Fermi taisyklę. Parametrai yra tokie patys, kaip ir 2.5 pav.



2.8 pav.: Dažnai matuojamos skylančios sistemos sužadintos būsenos užpildos priklausomybė nuo laiko, kai sąveika su rezervuaro modomis aprašoma (2.71) lygtimi. Ištininė linija rodo skaitmeninio skaičiavimo rezultata, brūkšninė linija rodo laisvos sistemos eksponentinį skilimą su (2.72) sparta. Taškinė linija rodo (2.75) aproksimaciją. Skaičiavimuose naudota $a = 2$, kiti parametrai yra tokie patys, kaip ir 2.5 pav.

Antrasis narys lygtyje (2.73) rodo, kad skilimo greitis mažėja, mažėjant matavimo trukmei τ_M . Tai yra kvantinio Zenono efekto pasireiškimas.

Skaitmeninių skaičiavimų rezultatai yra pateikti 2.5 ir 2.6 pav. Tipiška dažnai matuojamos skylančios sistemos kvantinė trajektorija yra parodyta 2.5 pav. Tikimybė, kad matuojama sistema yra sužadintoje būsenoje, parodyta 2.6 pav. Matyti geras sutapimas su eksponentiniu skilimu, kurio sparta yra (2.73). Taip pat matyti kvantinis Zenono efektas.

Kai detektorius sąveikauja su skylančios sistemos sužadinta būseną, sąveikos narys yra

$$\hat{H}_I = \hbar\lambda|e\rangle\langle e|(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \quad (2.74)$$

ir kvantinės trajektorijos gaunamos kitokios. Tipiška kvantinė trajektorija yra parodyta 2.7 pav. Nepaisant šių skirtumų, suvidurkinta evoliucija, parodyta 2.6 pav., nepriklauso nuo to, su kuria būseną detektorius sąveikauja.

Skylančios sistemos modelis su $g(\omega) = \text{const}$ neleidžia gauti kvantinio anti-Zenono efekto, nes sąlygos šiam efektui atsirasti nėra patenkinamos. Tam, kad gautume kvantinį anti-Zenono efektą, naudojame sąveiką su rezervuaro modomis, nusakomą (2.71) lygtimi.

Tokiu atveju (2.31) lygtis neduoda tinkamos dažnai matuojamos sistemos skilimo spartos. Tam, kad įvertintume skilimo spartą, sprendžiame Liouville'io-von Neumann'o lygtį $i\hbar\dot{\rho} = [\hat{H}, \rho]$ sistemos su (2.66)–(2.69) hamiltonianu tankio matricai, papildomai įtraukdami narius, aprašančius nediagonalinių elementų mažėjimą su sparta $1/\tau_M$.

Skleidžiant dydžio Λ^{-1} laipsnių eilutę ir paliekant tik pirmus narius, gaunama skilimo sparta

$$\Gamma_{e \rightarrow g} = \Gamma_{e \rightarrow g}^{(0)} \left(1 - \frac{\Gamma_{e \rightarrow g}^{(0)}}{\pi\Lambda} (5a^2 - 1) \right) + \Gamma_{e \rightarrow g}^{(0)} \frac{2}{\pi} \frac{(a^2 - 1)}{\Lambda\tau_M}. \quad (2.75)$$

(2.75) lygtis yra tinkama tik pakankamai ilgoms matavimo trukmėms τ_M , kadangi skleidimas eilute galioja, kai $\Lambda\tau_M \gg 1$. Iš lygties (2.75) matyti, kad norint gauti kvantinį anti-Zenono efektą, parametras a turi būti didesnis už 1. Kai parametras a yra mažesnis už 1, gauname Zenono efektą, o kai $a = 1$, skilimo sparta sutampa su laisvos sistemos skilimo sparta.

Tikimybė, kad matuojama sistema yra sužadintoje būsenoje, gauta iš skaitmeninių skaičiavimų, pavaizduota 2.8 pav. Matyti kvantinis anti-Zenono efektas — matuojamos sistemos skilimo sparta yra didesnė, negu nematuojamos.

2.4 Silpni matavimai ir laiko problema kvantinėje mechanikoje

Šiame skyriuje silpnų matavimų modelis yra pritaikomas nagrinėti įvairioms su laiku susijusioms problemoms kvantinėje mechanikoje.

2.4.1 Silpnų matavimų idėja

Šiame skyriuje pristatoma silpnų matavimų idėja, iškelta Aharonov'o, Albert'o ir Vaidman'o [12–17]. Matuojamą dydį atitinka operatorius \hat{A} , detektoriaus pradinė būsena yra $|\Phi\rangle$. Tam, kad silpni matavimai duotų informaciją, matavimai turi būti atliekami identišku sistemų ansamblyje. Kiekviena sistema su jos detektoriumi yra paruošiama toje pačioje pradinėje būsenoje. Po sąveikos detektorių parodymai yra suvidurkinami.

Nagrinėjamas modelis sudarytas iš matuojamosios sistemos \mathbf{S} ir detektoriaus \mathbf{D} . Modelio hamiltonianas yra

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_D + \hat{H}_I, \quad (2.76)$$

kur \hat{H}_S bei \hat{H}_D yra sistemos bei detektoriaus hamiltonianai. Operatorius, aprašantis sąveiką tarp matuojamosios sistemos ir detektoriaus, pasirenkamas tokio pavidalo:

$$\hat{H}_I = \lambda \hat{q} \hat{A}. \quad (2.77)$$

Parametras λ charakterizuoja sąveikos su detektoriumi stiprumą. Esant labai mažam parametru λ , sistemos evoliucija mažai sutrikdoma. Matavimo trukmė yra τ . Laikome, kad trukmė τ yra maža. Operatorius \hat{q} veikia detektoriaus Hilberto erdvėje. Paprastumo dėlei laikysime, kad q yra detektoriaus koordinatė. Impulsas, jungtinis koordinatėi q , yra p_q .

(2.77) hamiltonianas atitinka detektorių veikiančią pastovią jėgą. Ši jėga keičia detektoriaus impulsą. Klasikinės mechanikos požiūriu, impulso pokytis yra proporcingas jėgai. Kadangi sąveikos stiprumas λ bei trukmė τ yra maži, vidurkis $\langle \hat{A} \rangle$ žymiai nekinta matavimo metu. (2.77) hamiltoniano poveikis nedaug pakeičia vidutinį detektoriaus impulsą $\langle \hat{p}_q \rangle - \langle \hat{p}_q \rangle_0 = -\lambda\tau \langle \hat{A} \rangle$, kur $\langle \hat{p}_q \rangle_0 = \langle \Phi(0) | \hat{p}_q | \Phi(0) \rangle$ yra vidutinis detektoriaus impulsas prieš matavimą bei $\langle \hat{p}_q \rangle = \langle \Phi(\tau) | \hat{p}_q | \Phi(\tau) \rangle$ yra vidutinis impulsas po matavimo. Todėl galime įvesti vidurkio $\langle \hat{A} \rangle$ “silpną vertę”

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\langle \hat{p}_q \rangle_0 - \langle \hat{p}_q \rangle}{\lambda\tau}. \quad (2.78)$$

Naudojantis (2.78) lygtimi gauname, kad silpna vertė sutampa su įprastu vidurkiu $\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}\{\hat{A}\hat{\rho}_S(0)\}$.

Silpno matavimo įtaką matuojamosios sistemos evoliucijai galima padaryti kiek norima mažą, naudojant mažą λ parametru. Todėl po matuojamosios sistemos silpnos sąveikos

su detektoriumi galima bandyti matuoti kitą dydį B , naudojant įprastą, stiprų matavimą. Matuojame kiekvieno detektoriaus impulsą p_q po sąveikos su sistema. Po to atliekame dydžio B matavimą ansamblio sistemose. Tada surenkame ir vidurkiname impulsus p_q tik iš tų sistemų, kuriose B matavimas davė nustatytą vertę.

Tikimybė, kad sistema turi nurodytą dydžio B vertę *ir* detektorius turi impulsą $p_q(t)$ laiko momentu t , yra $W(B, p_q; t) = \text{Tr} \{ |B\rangle\langle B| p_q \langle p_q | \hat{\rho}(t) \}$, kur $|p_q\rangle$ yra impulso operatoriaus \hat{p}_q tikrinė funkcija.

Apibrėžkime sąlyginę tikimybę, t.y. tikimybę, kad detektoriaus impulsas yra p_q su sąlyga, kad sistema turi nurodytą B vertę. Pagal Bayes'o teoremą ši tikimybė yra

$$W(p_q; t|B) = \frac{W(B, p_q; t)}{W(B; t)}, \quad (2.79)$$

kur $W(B; t) = \text{Tr} \{ |B\rangle\langle B| \hat{\rho}(t) \}$ yra tikimybė, kad sistema turi nurodytą dydžio B vertę. Vidutinis detektoriaus impulsas su sąlyga, kad sistema turi nurodytą dydžio B vertę, yra

$$\langle p_q(t) \rangle = \int p_q W(p_q; t|B) dp_q. \quad (2.80)$$

Iš (2.78) bei (2.80) lygčių, naudojant trikdžių teorijos pirmos eilės aproksimaciją, gauname A dydžio vidurkį su sąlyga, kad sistema turi nurodytą dydžio B vertę

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_B &= \frac{1}{2\langle B|\hat{\rho}_S|B \rangle} \langle |B\rangle\langle B| \hat{A} + \hat{A} |B\rangle\langle B| \rangle \\ &+ \frac{1}{i\hbar\langle B|\hat{\rho}_S|B \rangle} (\langle q \rangle \langle p_q \rangle - \text{Re} \langle \hat{q} \hat{p}_q \rangle) \langle [|B\rangle\langle B|, \hat{A}] \rangle. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Jei lygtyje (2.81) komutatorius $[|B\rangle\langle B|, \hat{A}]$ yra nelygus nuliui, tai net ir labai silpniems matavimams gaunama vertė priklauso nuo konkretaus detektoriaus ir nėra universali. Tai reiškia, kad tokiu atveju negalima gauti apibrėžtos vertės.

2.4.2 Trukmė su sąlyga, kad sistema yra duotoje galutinėje būsenoje

Nagrinėkime laike evoliucionuojančią sistemą. Tegu χ yra vienas iš stebimų dydžių, kintantis bėgant laikui. Nagrinėjame galimų χ verčių poaibį Γ . Keliamas klausimas, kiek laiko χ vertės priklauso šiam poaibiui.

Jei žinome galutinę sistemos būseną, galime klausiti, kiek laiko dydžio χ vertės priklauso nagrinėjam poaibiui, kai sistema evoliucionuoja į duotą galutinę būseną. Klausimas apie tuneliavimo trukmę yra tokio tipo klausimas, nes jame klausama, kiek laiko dalelė praleidžia nurodytoje erdvės srityje ir taip pat žinoma, kad dalelė tuneliavo. Galima tikėtis, kad tokio tipo klausimai ne visada gali būti atsakyti. Mūsų tikslas yra gauti sąlygas, kada atsakymas galimas.

Nagrinėjame modelį, kuriame matavimo įrenginys sąveikauja su sistema tik tada jei dydis χ turi vertes, artimas χ_D . Jei norime gauti laiką, kurį sistema praleido apibrėžtoje didelėje χ verčių srityje, naudojame daug detektorių.

Naudojamės silpnų matavimų idėja. Operatorių \hat{A} pasirenkame tokio pavidalo:

$$\hat{D}(\chi_D) = |\chi_D\rangle\langle \chi_D| = \delta(\hat{\chi} - \chi_D). \quad (2.82)$$

Po laiko t detektorių parodymai yra surenkami ir suvidurkinami.

Hamiltonianas (2.77) atitinka pastovią jėgą, veikiančią detektorių kai dydis χ yra artimas χ_D . Ši jėga pakeičia detektoriaus impulsą. Klasikinėje mechanikoje impulso pokytis yra proporcingas laiko tarpui, kurį sistema praleidžia turėdama dydžio χ vertę χ_D , bei proporcingumo koeficientas lygus detektorių veikiančiai jėgai.

Tokiu būdu laikas, kurį sistema praleidžia iki laiko momento t turėdama dydžio χ vertę, artimą χ_D , yra

$$\tau(t) = -\frac{1}{\lambda} (\langle p_q(t) \rangle - \langle p_q \rangle), \quad (2.83)$$

kur $\langle p_q \rangle$ bei $\langle p_q(t) \rangle$ yra detektoriaus impulso vidurkiai pradinio laiko momentu bei laiko momentu t .

Pažymėjimams sutrumpinti įvedame operatorių

$$\hat{F}(\chi_D, t) = \int_0^t \tilde{D}(\chi_D, t_1) dt_1, \quad (2.84)$$

kur

$$\tilde{D}(\chi_D, t) = \hat{U}_S^\dagger(t) \hat{D}(\chi_D) \hat{U}_S(t). \quad (2.85)$$

Iš (2.83) lygties gauname laiko tarpą, per kurį sistema turi nurodytą dydžio χ vertę iki laiko momento t :

$$\tau(\chi, t) = \langle \hat{F}(\chi, t) \rangle. \quad (2.86)$$

Laikas, praleistas srityje Γ , yra

$$t(\Gamma; t) = \int_\Gamma \tau(\chi, t) d\chi = \int_0^t dt' \int_\Gamma d\chi P(\chi, t'), \quad (2.87)$$

kur $P(\chi, t') = \langle \tilde{D}(\chi, t') \rangle$ yra tikimybė sistemai turėti vertę χ laiko momentu t' . Tuo atveju, kai χ yra dalelės koordinatė, (2.87) lygtis atitinka gerai žinomą išraišką buvimo trukmei.

Toliau nagrinėjamas atvejis, kai yra žinoma galutinė sistemos būseną. Bendresniu atveju gali būti žinoma, kad sistemos galutinė būseną priklauso sistemos Hilberto erdvės poerdviui \mathcal{H}_f . Projekcinis operatorius, projektuojantis į galutinių būsenų poerdvį, yra \hat{P}_f . Po sąveikos su sistemomis matuojame kiekvieno detektoriaus impulsą p_q . Po to nustatome sistemų galutines būsenas ir vidurkiname p_q tik tų sistemų, kurių galutinė būseną priklauso poerdviui \mathcal{H}_f .

Naudojantis (2.81) lygtimi, gauname trukmę su sąlyga, kad galutinė sistemos būseną priklauso poerdviui \mathcal{H}_f :

$$\begin{aligned} \tau_f(\chi, t) &= \frac{1}{2\langle \tilde{P}_f(t) \rangle} \left\langle \tilde{P}_f(t) \hat{F}(\chi, t) + \hat{F}(\chi, t) \tilde{P}_f(t) \right\rangle \\ &+ \frac{1}{i\hbar\langle \tilde{P}_f(t) \rangle} (\langle q \rangle \langle p_q \rangle - \text{Re}\langle \hat{q}\hat{p}_q \rangle) \left\langle \left[\tilde{P}_f(t), \hat{F}(\chi, t) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.88)$$

(2.88) lygtis sudaryta iš dviejų narių, todėl galime įvesti dvi išraiškas, turinčias laiko dimensiją

$$\tau_f^{(1)}(\chi, t) = \frac{1}{2\langle \tilde{P}_f(t) \rangle} \left\langle \tilde{P}_f(t) \hat{F}(\chi, t) + \hat{F}(\chi, t) \tilde{P}_f(t) \right\rangle, \quad (2.89)$$

$$\tau_f^{(2)}(\chi, t) = \frac{1}{2i\langle \tilde{P}_f(t) \rangle} \left\langle \left[\tilde{P}_f(t), \hat{F}(\chi, t) \right] \right\rangle. \quad (2.90)$$

Tada laikas, kurį sistema praleidžia turėdama nurodytą dydžio χ vertę su sąlyga, kad jos galutinė būseną priklauso poerdviui \mathcal{H}_f , gali būti užrašytas kaip

$$\tau_f(\chi, t) = \tau_f^{(1)}(\chi, t) + \frac{2}{\hbar} (\langle q \rangle \langle p_q \rangle - \text{Re} \langle \hat{q} \hat{p}_q \rangle) \tau_f^{(2)}(\chi, t). \quad (2.91)$$

Jei (2.88) lygtyje komutatorius $[\tilde{P}_f(t), \hat{F}(\chi, t)]$ yra nelygus nuliui, tai net ir labai silpnų matavimų riboje gauta vertė priklauso nuo matavimo įrenginio būsenos. Tai reiškia, kad negalime gauti apibrėžtos vertės sąlyginei trukmei. Vienareikšmio laiko nustatymo, kai yra žinoma galutinė sistemos būseną, sąlyga yra

$$[\tilde{P}_f(t), \hat{F}(\chi, t)] = 0. \quad (2.92)$$

Dydis $\tau_f(t)$ turi daug klasikinės trukmės sąvynių. Jei galutinės būsenos $\{f\}$ sudaro pilną rinkinį, tai atitinkami projekciniai operatoriai tenkina pilnumo sąlygą $\sum_f \hat{P}_f = 1$. Tada, naudodamiesi (2.88) lygtimi, gauname išraišką

$$\sum_f \langle \tilde{P}_f(t) \rangle \tau_f(\chi, t) = \tau(\chi, t). \quad (2.93)$$

Dydis $\langle \tilde{P}_f(t) \rangle$ yra tikimybė, kad sistema laiko momentu t yra būsenoje f . Lygtis (2.93) rodo, kad pilna trukmė yra lygi vidurkiui pagal visas galutines būsenas, kaip ir klasikinėje fizikoje.

Operatoriaus $\hat{\chi}$ tikrinės funkcijos sudaro pilną bazę $\int |\chi\rangle \langle \chi| d\chi = 1$. Todėl galioja lygybė

$$\int \tau_f(\chi, t) d\chi = t. \quad (2.94)$$

(2.94) lygtis rodo, kad trukmė, per kurią dydis χ gali turėti bet kokią vertę, yra lygi pilnai trukmei t , kaip ir klasikinėje fizikoje.

2.4.3 Tuneliavimo trukmė

Šiame skyriuje nagrinėjama tuneliavimo trukmės nustatymo galimybė, naudojantis silpnais matavimais.

Naudosimės tokiu kriterijumi: dalelė tuneliavo, jei iš pradžių ji buvo prieš barjerą, o vėliau buvo aptikta už barjero. Laikysime, kad dalelės vidutinė energija bei energijos neapibrėžtumas yra mažesni už barjero aukštį. Tokiu būdu, ar dalelė tuneliavo, nusako projekcinis operatorius, projektuojantis banginę funkciją į poerdvį funkcijų, lokalizuotų už barjero:

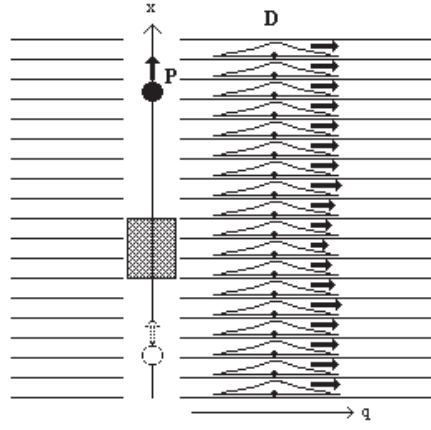
$$\hat{f}_T(X) = \Theta(\hat{x} - X), \quad (2.95)$$

kur Θ yra Heaviside'o vienetinio šuoliuko funkcija, X yra taškas už barjero. Heisenberg'o atvaizdavime šis operatorius yra

$$\tilde{f}_T(t, X) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right) \hat{f}_T(X) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right). \quad (2.96)$$

Norint įskaityti visas tuneliavusias daleles, reikia imti ribą $t \rightarrow +\infty$. Taigi, ar dalelė tuneliavo, nusako operatorius $\tilde{f}_T(\infty, X) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{f}_T(t, X)$. Jam galime gauti tokią išraišką:

$$\tilde{f}_T(t, X) = \hat{f}_T(X) + \int_0^t \tilde{J}(X, t_1) dt_1, \quad (2.97)$$



2.9 pav.: Tuneliavimo trukmės matavimo konfiguracija. Dalelė **P** tuneliuoja išilgai x ašies ir sąveikauja su detektoriais **D**. Potencialinis barjeras yra pavaizduotas kaip stačiakampis. Sąveika su konkrečiu detektoriumi vyksta tik siauroje srityje, apribotoje horizontaliomis linijomis. Detektorių impulsų pokyčiai pavaizduoti rodyklėmis.

kur $\tilde{J}(X, t_1)$ yra tikimybės tankio srauto operatorius

$$\hat{J}(x) = \frac{1}{2M} (|x\rangle\langle x|\hat{p} + \hat{p}|x\rangle\langle x|) \quad (2.98)$$

Heisenberg'o atvaizdavime.

Projekcinis operatorius

$$\hat{D}(\Gamma) = \int_{\Gamma} |x\rangle\langle x| dx \quad (2.99)$$

leidžia nustatyti tikimybę dalelei būti srityje Γ . Čia $|x\rangle$ yra koordinatės operatoriaus tikrinė funkcija. Bendru atveju operatoriai $\hat{D}(\Gamma, t)$ ir $\hat{f}_T(\infty, X)$ nekomutuoja. Tai reiškia, kad negalima vienu metu turėti informacijos apie dalelės padėtį ir apie tai, ar dalelė tuneliavo. Klausimas, kiek laiko tuneliavusi dalelė praleido po barjeru, tokiu būdu neturi vienareikšmio atsakymo, jei atsakyme reikalaujama tikimybės, kad dalelė yra aptikta srityje Γ laiko momentu t bei yra rasta už barjero vėlesniu laiko momentu.

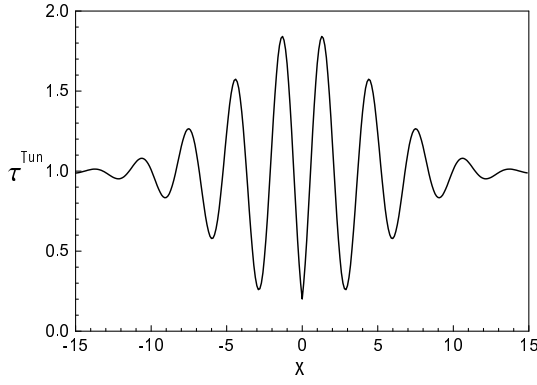
Nagrinėjama sistema sudaryta iš dalelės **P** ir keleto detektorių **D**. Kiekvienas detektorius sąveikauja su dalele tik siauroje erdvės srityje. Sistemos konfiguracija yra pavaizduota 2.9 pav. Laiko momentu $t = 0$ dalelė yra prieš barjerą. Kai sąveika su detektoriais yra labai silpna, ji kiek norima mažai įtakoja dalelės būseną. Todėl kiekvienas detektorius gali būti nagrinėjamas atskirai.

Silpnų matavimų duodamas laiko tarpas, praleistas srityje tarp taškų x_1 ir x_2 yra

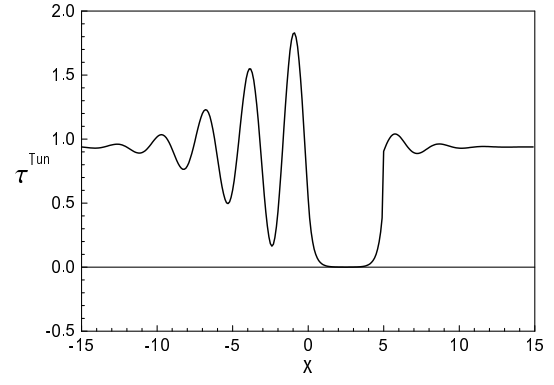
$$t^{\text{Dw}}(x_2, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \tau^{\text{Dw}}(x, t \rightarrow \infty) dx = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_0^{\infty} \rho(x, t) dt. \quad (2.100)$$

Tai yra [18] žinoma išraiška buvimo laikui. Buvimo laikas yra vidurkis pagal visą dalelių ansamblį, neatsižvelgiant į tai, ar dalelės tuneliavo, ar ne.

Vidurkinant detektorių impulsų pokyčius tik pagal tuneliavusių dalelių subansamblį, gaunama išraiška trukmei, kurią tuneliavusi dalelė praleido vienetinio ilgio srityje apie tašką



2.10 pav.: Tuneliavimo trukmės tankis δ funkcijos barjerui su parametru $\Omega = 2$. Barjeras yra taške $x = 0$. Pasirinktais vienetais $\hbar = 1$ ir $M = 1$ bei vidutinis gausinio bangų paketo impulsas $\langle p \rangle = 1$. Šiais vienetais ilgis ir laikas yra bedimensiniai. Bangų paketo plotis impulsų erdvėje yra $\sigma = 0,001$.



2.11 pav.: Tuneliavimo trukmės tankis stačiakampiam barjerui. Barjeras yra tarp taškų $x = 0$ ir $x = 5$, barjero aukštis $V_0 = 2$. Naudoti vienetai ir bangų paketo parametrai yra tokie pat, kaip 2.10 pav.

x :

$$\tau(x) = \tau^{\text{Tun}}(x) + \frac{2}{\hbar} (\langle q \rangle \langle p_q \rangle - \text{Re} \langle \hat{q} \hat{p}_q \rangle) \tau_{\text{corr}}^{\text{Tun}}(x), \quad (2.101)$$

kur

$$\tau^{\text{Tun}}(x) = \frac{1}{2 \langle \hat{N}(X) \rangle} \left\langle \hat{N}(X) \hat{F}(x) + \hat{F}(x) \hat{N}(X) \right\rangle, \quad (2.102)$$

$$\tau_{\text{corr}}^{\text{Tun}}(x) = \frac{1}{2i \langle \hat{N}(X) \rangle} \left\langle \left[\hat{N}(X), \hat{F}(x) \right] \right\rangle. \quad (2.103)$$

Čia

$$\hat{F}(x) = \int_0^\infty \tilde{D}(x, t_1) dt_1, \quad (2.104)$$

$$\hat{N}(x) = \int_0^\infty \tilde{J}(x, t_1) dt_1. \quad (2.105)$$

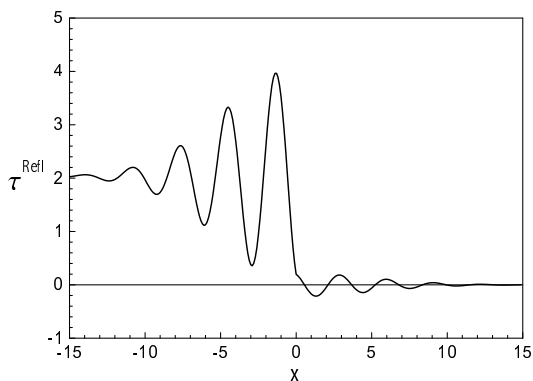
Gauta išraiška trukmei net ir labai silpnų matavimų riboje priklauso nuo detektoriaus būsenos.

Gautas formules iliustruosime δ funkcijos barjerui

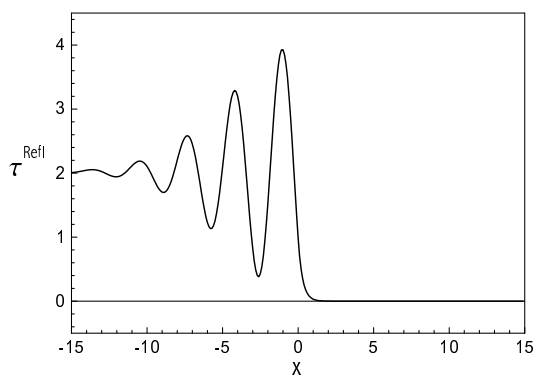
$$V(x) = \Omega \delta(x)$$

ir stačiakampiam barjerui. Krentantis bangų paketas yra Gauss'o pavidalo ir yra lokalizuotas toli į kairę nuo barjero.

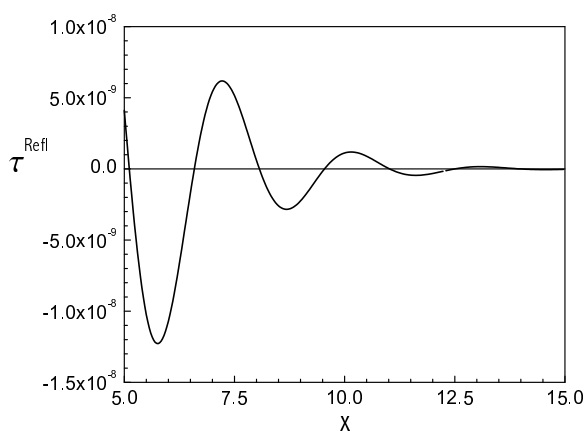
2.10 ir 2.11 pav. matyti osciliacijos prieš barjerą ir už jo. Kai x yra toli nuo barjero, dydis τ^{Tun} turi vertę, artimą 1. Tas atitinka klasikinės mechanikos duodamą vertę, nes pasirinktais vienetais vidutinis dalelės greitis yra 1. 2.11 pav. matyti kita savybė: "tuneliavimo trukmės



2.12 pav.: Atspindžio trukmės tankis, tokiomis pačiomis sąlygomis, kaip ir 2.10 pav.



2.13 pav.: Atspindžio trukmės tankis, tokiomis pačiomis sąlygomis, kaip ir 2.11 pav.



2.14 pav.: Atspindžio trukmės tankis stačiakampiam barjerui srityje už barjero. Parametrai ir pradinės sąlygos yra tokios pat, kaip ir pav. 2.11

tankis” yra beveik nulis barjero srityje. Tai atitinka Hartmann’o ir Fletcher’io efektą [19,20]: platiems barjerams efektyvus tuneliavimo greitis yra labai didelis.

Pasiūlytą modelį galime pritaikyti atspindžio trukmei. Tuo tikslu tuneliavimą nusakantį operatorių \hat{f}_T pakeičiame projekciniu operatoriumi

$$\hat{f}_R = 1 - \hat{f}_T, \quad (2.106)$$

nusakančiu atspindį. Gauname, kad sąlyga

$$\tau^{\text{Dw}} = T\tau^{\text{Tun}} + R\tau^{\text{Refl}}, \quad (2.107)$$

kur T ir R — praėjimo ir atspindžio tikimybės, yra automatiškai patenkinama.

Atspindžio trukmės tankis tokiems pat barjerams parodytas 2.12 ir 2.13 pav. Krentantis bangų paketas yra gausinis ir lokalizuotas toli į kairę nuo barjero. Matyti, kad abiejose barjero pusėse yra osciliacijos. Dalis už stačiakampio barjero parodyta 2.14 pav. Už barjero “laiko tankis” kai kuriose vietose yra neigiamas. Tai yra operatorių nekomutavimo pasekmė. Kai x yra toli į kairę nuo barjero, “laiko tankis” artėja prie vertės, lygios 2, toli į dešinę nuo barjero artėja į 0. Tas atitinka klasikinę mechaniką, nes pasirinktais vienetais dalelės greitis lygus 1 ir atspindėta dalelė sritį prieš barjerą praeina du kartus.

Kadangi $\int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle\langle x|dx = 1$, komutatorius yra lygus nuliui $[1, \tilde{f}_T(\infty, X)] = 0$. Taigi, jei sritis Γ yra pakankamai didelė, galima apibrėžti trukmę, praleistą joje. Nagrinėjame laiko tarpą, kurį dalelė praleido srityje tarp taškų x_1 ir x_2 ,

$$t(x_2, x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \tau(x)dx.$$

Jei taškas x_1 yra toli į dešinę nuo pradinės bangų paketo pozicijos bei $x_2 \rightarrow +\infty$, kvazimonochromatiniams bangų paketams gauname gerai žinomas išraiškas [18]

$$t^{\text{Tun}}(x_2, x_1) \rightarrow t_T^{\text{Ph}} + \frac{1}{p_E} M(x_2 - x_1), \quad (2.108)$$

$$t_{\text{corr}}^{\text{Tun}}(x_2, x_1) \rightarrow -t_T^{\text{Im}}, \quad (2.109)$$

kur

$$t_T^{\text{Ph}} = \hbar \frac{d}{dE}(\arg t(E)) \quad (2.110)$$

yra fazinis laikas bei

$$t_T^{\text{Im}} = \hbar \frac{d}{dE}(\ln |t(E)|) \quad (2.111)$$

yra kompleksinio laiko menama dalis. Čia $t(E)$ yra tuneliavimo amplitudė, $p_E = \sqrt{2ME}$. Kai $x_1 \rightarrow -\infty$ ir nagrinėjama sritis apima pradinę bangų paketo padėtį, gauname, kad dydžio $\tau_{\text{corr}}^{\text{Tun}}(x)$ integralas yra lygus nuliui, laiko tarpas, praleistas srityje tarp taškų x_1 ir x_2 , tada yra apibrėžtas vienareikšmiškai.

2.4.4 Silpni atvykimo laiko matavimai

Šiame skyriuje bandoma įvesti dalelės atvykimo laiko tikimybės pasiskirstymą kvantinėje mechanikoje.

Atvykimo laiko tikimybės pasiskirstymas gali būti gautas iš tinkamo klasikinio apibrėžimo, operatorių nekomutatyvumą apeinant, pasinaudojus silpnų matavimų idėja.

Ieškosime atvykimo laiko apibrėžimo, tinkančio tiek klasikinei, tiek kvantinei mechanikai. Galimas toks apibrėžimas: dalelė atvyksta į tašką X laiko momentu t iš kairės, jei: (a) laiko momentu t dalelė yra srityje $x < X$ ir (b) laiko momentu $t + \Delta t$ ($\Delta t \rightarrow 0$) dalelė yra aptinkama srityje $x > X$.

Kadangi kvantinė mechanika nagrinėja tikimybes, yra patogų naudoti tikimybinį aprašymą ir klasikinei mechanikai. Todėl nagrinėsime nesąveikaujančių klasikinių dalelių ansamblį. Tikimybės tankis fazinėje erdvėje yra $\rho(x, p; t)$.

Tikimybė, kad dalelė atvyksta iš srities $x < X$ į sritį $x > X$ laiko intervalu tarp t ir $t + \Delta t$ kai $\Delta t \rightarrow 0$, yra

$$\Pi_+(t, X) = \frac{1}{N_+} \int_0^\infty \frac{p}{m} \rho(X, p; t) dp, \quad (2.112)$$

kur N_+ yra normavimo konstanta. Atvykimo laiko tikimybės pasiskirstymas yra susijęs su tikimybės tankio srautu. Galime įvesti "teigiamą tikimybės tankio srautą"

$$J_+(x; t) = \int_0^\infty \frac{p}{m} \rho(x, p; t) dp \quad (2.113)$$

ir (2.112) lygtį užrašyti kaip

$$\Pi_+(t, X) = \frac{1}{N_+} J_+(X; t). \quad (2.114)$$

Pasiūlyti kvantiniai dydžio J_+ analogai net ir laisvos dalelės atveju gali būti neigiami, todėl klasikinė išraiška atvykimo laiko tikimybės (2.114) pasiskirstymui nėra tinkama kvantinei mechanikai.

Pasiūlytos (a) ir (b) sąlygos nenaudoja trajektorijos sąvokos, todėl galima bandyti šį atvykimo laiko apibrėžimą naudoti ir kvantinėje mechanikoje. Pasiūlytas atvykimo laiko tikimybės apibrėžimas gali būti naudojamas kvantinėje mechanikoje tik tuo atveju, jei srities, kurioje yra dalelė, nustatymas nesutrikdo dalelės judėjimo. To galima pasiekti naudojant silpnus matavimus, pasiūlytus Aharonov'o, Albert'o ir Vaidman'o.

Detektorius sąveikauja su dalele tik $x < X$ srityje. Kaip operatorių A pasirenkame projekcinį operatorių \hat{P}_1 , projektuojantį į sritį $x < X$. Įvedame tikimybės rasti dalelę srityje $x < X$ "silpną vertę"

$$W(1) \equiv \langle \hat{P}_1 \rangle = \frac{\langle \hat{p}_q \rangle_0 - \langle \hat{p}_q \rangle}{\lambda \tau}. \quad (2.115)$$

Po sąveikos su dalele matuojame kiekvieno detektoriaus impulsą p_q . Po laiko tarpo Δt atliekamas galutinis matavimas, nustatantis, ar dalelė yra srityje $x > X$. Tada surenkame p_q impulsus tik toms dalelėms, kurios buvo rastos srityje $x > X$.

Projekcinis operatorius \hat{P}_2 projektuoja į sritį $x > X$. Heisenberg'o atvaizdavime šis operatorius yra $\tilde{P}_2(t) = \hat{U}(t)^\dagger \hat{P}_2 \hat{U}(t)$. Naudojantis (2.81) lygtimi gauname tikimybę, kad dalelė laiko momentu t yra srityje $x < X$, o laiko momentu $t + \Delta t$ yra srityje $x > X$:

$$W(1, 2) \approx \frac{1}{2} \langle \tilde{P}_2(\Delta t) \hat{P}_1 + \hat{P}_1 \tilde{P}_2(\Delta t) \rangle + \frac{i}{\hbar} (\langle \hat{p}_q \rangle \langle \hat{q} \rangle - \text{Re} \langle \hat{q} \hat{p}_q \rangle) \langle [\hat{P}_1, \tilde{P}_2(\Delta t)] \rangle. \quad (2.116)$$

Dydis $W(1, 2)$ gali būti traktuojamas kaip atvykimo laiko tikimybės pasiskirstymo silpna vertė.

Lygtis (2.116) sudaryta iš dviejų narių, todėl galime įvesti du dydžius

$$\Pi^{(1)} = \frac{1}{2\Delta t} \langle \hat{P}_1 \tilde{P}_2(\Delta t) + \tilde{P}_2(\Delta t) \hat{P}_1 \rangle \quad (2.117)$$

bei

$$\Pi^{(2)} = \frac{1}{2i\Delta t} \langle [\hat{P}_1, \tilde{P}_2(\Delta t)] \rangle. \quad (2.118)$$

Tada

$$W(1, 2) = \Pi^{(1)} \Delta t - \frac{2\Delta t}{\hbar} (\langle \hat{p}_q \rangle \langle \hat{q} \rangle - \text{Re} \langle \hat{q} \hat{p}_q \rangle) \Pi^{(2)}. \quad (2.119)$$

Jei komutatorius $[\hat{P}_1, \tilde{P}_2(\Delta t)]$ nelygus nuliui, tada net labai silpno matavimo riboje gauta vertė priklauso nuo detektoriaus būsenos. Tai reiškia, kad nėra apibrėžtos atvykimo laiko tikimybės.

Dydžiai $W(1, 2)$, $\Pi^{(1)}$ ir $\Pi^{(2)}$ yra realūs. Yra patogu įvesti kompleksinį dydį

$$\Pi_C = \Pi^{(1)} + i\Pi^{(2)} = \frac{1}{\Delta t} \langle \hat{P}_1 \tilde{P}_2(\Delta t) \rangle \quad (2.120)$$

ir jį atitinkantį operatorių

$$\hat{\Pi}_+ = \frac{1}{\Delta t} \hat{P}_1 \tilde{P}_2(\Delta t). \quad (2.121)$$

Analogiškai, operatorius

$$\hat{\Pi}_- = \frac{1}{\Delta t} \hat{P}_2 \tilde{P}_1(\Delta t) \quad (2.122)$$

atitinka atvykimą iš dešinės pusės.

Operatorius $\hat{\Pi}_+$ turi kai kurias klasikinio teigiamo tikimybės tankio srauto savybes. Riboje $\Delta t \rightarrow 0$ gauname tikimybės tankio srautą $\hat{J} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\hat{\Pi}_+ - \hat{\Pi}_-)$, kaip ir klasikinėje mechanikoje. Tačiau dydis $\langle \hat{\Pi}_+ \rangle$ yra kompleksinis, jo reali dalis gali būti ir neigiama, skirtingai nuo klasikinio dydžio J_+ . Kai menama dalis yra maža, normuotas dydis $\langle \hat{\Pi}_+ \rangle$ gali būti traktuojamas kaip atvykimo laiko tikimybės pasiskirstymas.

Yra naudinga turėti išraiškas operatoriaus $\hat{\Pi}_+$ matriciniams elementams. Impulso tikrinių būsenų $|p\rangle$ bazėje gauname

$$\begin{aligned} \langle p_1 | \hat{\Pi}_+ | p_2 \rangle &= \frac{i\hbar}{2\Delta t(p_2 - p_1)} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_2 - p_1)X\right) \\ &\times \left(e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\Delta t}{2m}(p_1^2 - p_2^2)} \operatorname{erfc}\left(-p_1\sqrt{\frac{i\Delta t}{2\hbar m}}\right) - \operatorname{erfc}\left(-p_2\sqrt{\frac{i\Delta t}{2\hbar m}}\right) \right), \end{aligned} \quad (2.123)$$

kur $\sqrt{i} = \exp(i\pi/4)$. Kai

$$\frac{1}{\hbar} \frac{\Delta t}{2m} (p_1^2 - p_2^2) \ll 1, \quad p_1 \sqrt{\frac{\Delta t}{2\hbar m}} > 1, \quad p_2 \sqrt{\frac{\Delta t}{2\hbar m}} > 1,$$

tada operatoriaus $\hat{\Pi}_+$ matriciniai elementai yra

$$\langle p_1 | \hat{\Pi}_+ | p_2 \rangle \approx \frac{p_1 + p_2}{2m} \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_2 - p_1)X\right). \quad (2.124)$$

Ši lygtis sutampa su tikimybės tankio srauto matriciniais elementais.

Operatoriaus $\hat{\Pi}_+$ diagonaliniai elementai yra

$$\langle p | \hat{\Pi}_+ | p \rangle = \frac{p}{2m} \operatorname{erfc}\left(-p\sqrt{\frac{i\Delta t}{2\hbar m}}\right) + \frac{\hbar}{\sqrt{i2\pi\hbar m\Delta t}} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}\Delta t}. \quad (2.125)$$

Dydžio $\langle p | \hat{\Pi}_+ | p \rangle$ realioji dalis pavaizduota 2.15 pav., menama dalis — 2.16 pav.

Naudojantis funkcijos erfc asimptotinė išraiška, gauname

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \langle p | \hat{\Pi}_+ | p \rangle \rightarrow \frac{p}{m}$$

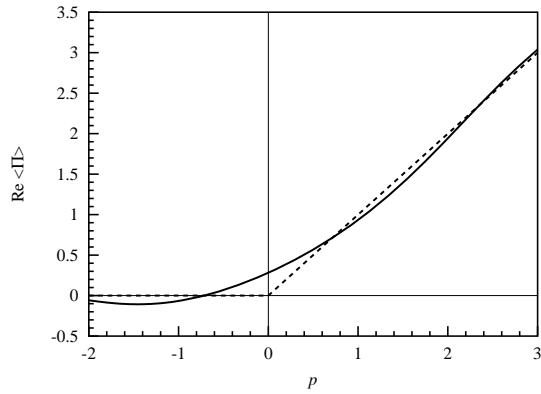
bei $\langle p | \hat{\Pi}_+ | p \rangle \rightarrow 0$, kai $p \rightarrow -\infty$, t.y. menama dalis artėja prie nulio, realioji dalis artėja prie atitinkamos klasikinės vertės.

Asimptotinės funkcijos erfc išraiškos yra tinkamos, kai funkcijos argumentas yra didelis:

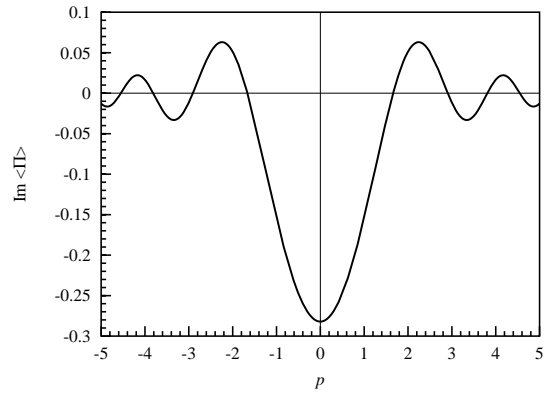
$$\Delta t > \frac{\hbar}{E_k}. \quad (2.126)$$

Čia E_k yra dalelės kinetinė energija.

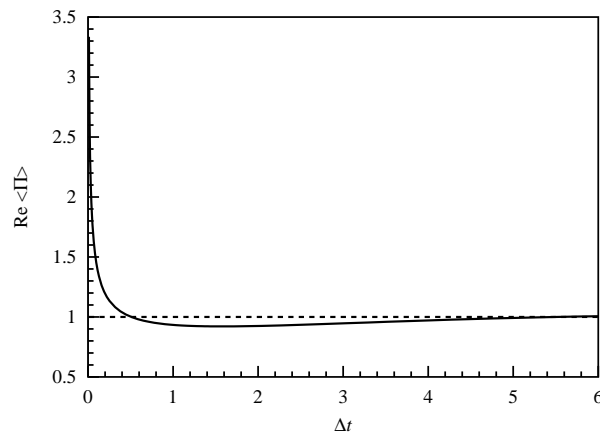
Dydžio $\operatorname{Re}\langle p | \hat{\Pi}_+ | p \rangle$ priklausomybė nuo Δt parodyta 2.17 pav. Mažiams Δt dydis $\langle p | \hat{\Pi}_+ | p \rangle$ yra proporcingas $1/\sqrt{\Delta t}$. Todėl, skirtingai negu klasikinėje mechanikoje, kvantinėje mechnikoje Δt negali būti nulis. Lygtis (2.126) nusako apribojimą laikui Δt . Taigi, pasiūlytas modelis neleidžia nustatyti atvykimo laiko tiksliau, negu \hbar/E_k .



2.15 pav.: Dydzio $\langle p|\hat{\Pi}_+|p\rangle$ realioji dalis. Atitinkamas klasikinis teigiamas tikimybės tankio srautas parodytas brūkšnine linija. Naudoti parametrai yra $\hbar = 1$, $m = 1$ bei $\Delta t = 1$. Šioje vienetų sistemoje impulsas p yra bedimensinis.



2.16 pav.: Dydzio $\langle p|\hat{\Pi}_+|p\rangle$ menama dalis. Naudoti parametrai tokie pat, kaip ir 2.15 pav.



2.17 pav.: Dydzio $\text{Re}\langle p|\hat{\Pi}_+|p\rangle$ priklausomybė nuo laiko Δt . Atitinkamas klasikinis teigiamas tikimybės tankio srautas parodytas brūkšnine linija. Naudoti parametrai yra $\hbar = 1$, $m = 1$ ir $p = 1$. Šioje vienetų sistemoje laikas Δt yra bedimensinis.

3 Pagrindiniai rezultatai ir išvados

1. Išnagrinėtas paprastas matavimo modelis, neatsižvelgiantis į detektoriaus sąveiką su aplinka. Naudojantis šiuo modeliu išvesta bendra formulė šuolio matavimo metu tikimybei. Dažnai matuojamos sistemos elgesys priklauso nuo sąveikos su matavimo įrenginiu stiprumo ir nuo pačios sistemos savybių.
2. Kai sąveika su matavimo įrenginiu pakankamai stipri, dažni matavimai sulėtina sistemos evoliuciją. Tačiau visiškai sustabdyti sistemos evoliucijos negalima.
3. Dažni matavimai gali pagreitinti arba sulėtinti sistemos evoliuciją. Nestabilios sistemos skilimo sparta dažnai matuojant gali būti padidinta — anti-Zenono efektas.
4. Išvesta bendra formulė šuolio matavimo metu tikimybei, iš pradžių gauta Kofman'o ir Kurizki [1]. Pagrindinės išvedimui naudotos prielaidos: (a) matavimas yra netrikdantis ir (b) detektoriaus dinamikai yra tinkamas Markovo artinys. Parodyta, kad ši formulė tinka ir tuo atveju, kai tarp matavimų yra laisvos sistemos evoliucijos tarpai.
5. Išnagrinėtas matavimo modelis, kuriame detektorius yra harmoninis osciliatorius, iš pradžių esantis šiluminėje pusiausvyroje su aplinka. Analiziškai išspręsta Lindblad'o tipo lygtis detektoriaus tankio matricai. Gauta formulė šuolio matavimo metu tarp matuojamos sistemos būsenų tikimybei. Iš naudoto modelio seka, kad detektoriaus temperatūros padidėjimas sustiprina kvantinių Zenono ar anti-Zenono efektą.
6. Kitame iš nagrinėtų modelių detektorius yra dviejų lygmenų sistema, sąveikaujanti su aplinka. Į aplinkos įtaką atsižvelgiama, naudojant kvantinių trajektorijų metodą. Naudojantis stochastine simuliacija gautos kvantinės trajektorijos rodo atsitiktinį banginės funkcijos kolapso matuojamoje sistemoje pobūdį, nors kvantiniai šuoliai vyksta tik detektoriuje. Tiek kvantinis Zenono, tiek anti-Zenono efektai yra pademonstruoti matuojamai dviejų lygmenų bei skylandčiai sistemoms. Gautas geras skaitmeninių rezultatų sutapimas su analiziniu matuojamos sistemos skilimo spartos įvertinimu. Toks sutapimas parodo, kad matavimo modelio detalės nėra svarbios, nes skilimo spartos iš esmės priklauso tik nuo vieno parametro — matavimo trukmės.
7. Silpni matavimai, pasiūlyti Ahronov'o, Albert'o ir Vaidman'o, panaudoti laiko matavimo kvantinėje mechanikoje tyrimui. Gauta išraiška trukmei, per kurią koks nors dydis turi nurodytą vertę. Ši išraiška sutampa su buvimo laiku tuneliavimo trukmės problemoje. Įvesta išraiška trukmei, per kurią dydis turi nurodytą vertę, su sąlyga, kad sistema yra rasta nurodytoje galinėje būsenoje. Ši išraiška turi daug atitinkamos klasikinės trukmės savybių. Tačiau ji turi apibrėžtą vertę tik tada kai (2.92) komutavimo sąlyga yra patenkinta. Priešingu atveju gali būti įvestos dvi charakteringos trukmės.
8. Atskiras tokios trukmės atvejis yra tuneliavimo trukmė. Silpnų matavimų procedūra parodo operatorių nekomutavimo pasekmes: negalime vienu metu turėti informacijos

apie tai, ar dalelė tuneliavo, ir apie dalelės padėtį. Nagrinėtas modelis taip pat demonstruoja Hartmann'o ir Fletcher'io efektą: platiems barjerams barjero srities indėlis į tuneliavimo trukmę yra beveik lygus nuliui.

9. Pasiūlytas atvykimo laiko tikimybės tankio apibrėžimas. Šis apibrėžimas išplėstas į kvantinę mechaniką, naudojantis silpnais matavimais. Pasiūlyta procedūra tinka tiek laisvoms dalelėms, tiek dalelėms, esančioms išoriniame potenciale. Tačiau ši procedūra neduoda vienareikšmio atvykimo laiko tikimybės pasiskirstymo. Analogiškai kompleksinei tuneliavimo trukmei įvedamas kompleksinis atvykimo laiko pasiskirstymas. Parodyta, kad pasiūlytasis metodas turi apribojimą atvykimo laiko nustatymo tikslumui.

4 Mokslinių darbų sąrašas

1. J. Ruseckas, *Possibility of tunneling time determination*, Phys. Rev. A **63** (5), 052107 (2001).
2. J. Ruseckas and B. Kaulakys, *Time problem in quantum mechanics and weak measurements*, Phys. Lett. A **287** (5–6), 297–303 (2001).
3. J. Ruseckas and B. Kaulakys, *Real measurements and quantum Zeno effect*, Phys. Rev. A **63** (6), 062103 (2001).
4. J. Ruseckas, *Influence of the finite duration of the measurement on the quantum Zeno effect*, Phys. Lett. A **291** (4–5), 185–189 (2001).
5. J. Ruseckas, *Influence of the detector's temperature on the quantum Zeno effect*, Phys. Rev. A, **66** (1), 012105 (2002).
6. J. Ruseckas and B. Kaulakys, *Weak measurement of arrival time*, Phys. Rev. A, **66** (5), 052106 (2002).
7. J. Ruseckas and B. Kaulakys, *General expression for the quantum Zeno and anti-Zeno effects*, Phys. Rev. A, **69** (3), 032104 (2004).
8. J. Ruseckas and B. Kaulakys, *Time problem in quantum mechanics and its analysis by the concept of weak measurement*, Lithuanian. J. Phys. **44** (3) 161–182 (2004).
9. J. Ruseckas and B. Kaulakys, *Quantum trajectory method for the quantum Zeno and anti-Zeno effects*, Phys. Rev. A **73** (5), 052101 (2006).

Literatūra

- [1] A. G. Kofman and G. Kurizki, *Nature (London)* **405**, 546 (2000).
- [2] V. B. Braginsky, Y. I. Vorontsov, and K. S. Thorne, *Science* **209**, 547 (1980).
- [3] C. M. Caves *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 341 (1980).
- [4] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **19**, 2888 (1979).
- [5] V. B. Braginsky and F. Y. Khalili, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 1 (1996).
- [6] E. Joos *et al.*, *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory* (Springer, Heidelberg, 2003).
- [7] A. K. Rajagopal, *Phys. Lett. A* **246**, 237 (1998).
- [8] Y. Zhao and G. H. Chen, *J. Chem. Phys.* **114**, 10623 (2001).
- [9] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin, 1983).
- [10] H. Carmichael, *An Open Systems Approach to Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1993).
- [11] M. Lewenstein, J. Zakrzewski, and T. W. Mossberg, *Phys. Rev. A* **38**, 808 (1988).
- [12] Y. Aharonov, D. Albert, A. Casher, and L. Vaidman, *Phys. Lett. A* **124**, 199 (1987).
- [13] Y. Aharonov and L. V. D. Z. Albert, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1351 (1988).
- [14] I. M. Duck, P. M. Stevenson, and E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. D* **40**, 2112 (1989).
- [15] Y. Aharonov and L. Vaidman, *Phys. Rev. A* **41**, 11 (1990).
- [16] Y. Aharonov and L. Vaidman, *J. Phys. A* **24**, 2315 (1991).
- [17] Y. Aharonov and L. Vaidman, *Phys. Scr. T* **76**, 85 (1998).
- [18] V. S. Olkhovsky and E. Recami, *Phys. Rep.* **214**, 339 (1992).
- [19] T. E. Hartmann, *J. Appl. Phys.* **33**, 3427 (1962).
- [20] J. R. Fletcher, *J. Phys. C* **18**, L55 (1985).

Summary

The main aims of the dissertation are to investigate simple models of the measurement in quantum mechanics and to apply those models to the problems of the quantum Zeno and anti-Zeno effects and to the problems of time in quantum mechanics.

In the thesis we investigate the quantum Zeno effect using different models of the measurement. We take into account the finite duration and the finite accuracy of the measurement. At first we consider a simple model of the measurement without taking into account the interaction of the detector with the environment. Using this model of the measurement the general equation for the probability of the jump during the measurement is derived. The behavior of the system under the repeated measurements depends on the strength of measurement and on the properties of the system.

Our model of the continuous measurement gives the same result as the approach based on the projection postulate. The decay rate is equal to the convolution of the reservoir coupling spectrum with the measurement-modified shape of the spectral line. The width of the spectral line is proportional to the strength of the interaction with the measuring device. When this width is much greater than the width of the reservoir, the quantum Zeno effect takes place. In a number of decaying systems, however, the reservoir spectrum grows with frequency almost up to the relativistic cut-off and the strength of the interaction required for the appearance of the quantum Zeno effect is so high that the initial system is significantly modified. When the spectral line is not very broad, the decay rate may be increased by the measurements more often than it may be decreased and the quantum anti-Zeno effect can be obtained.

The quantum Zeno effect is often analysed using the succession of the instantaneous measurements with free evolution of the measured system between the measurements. We analyze the measurements with finite duration, instead. The equations for the jump probability are obtained. Applying the equations to the measured two-level system we obtain a simple expression for the probability of the jump from one level to the other. The influence of the finite duration of the measurement is expressed as the small correction.

Furhther we analyze the quantum Zeno and quantum anti-Zeno effects without using any particular model of the measurement. The general expression for the jump probability during the measurement is derived. The main assumptions, used in the derivation, are the assumptions that the quantum measurement is non-demolition measurement and the Markovian approximation for the quantum dynamics is valid. We have shown that this equation is also suitable for the description of the pulsed measurements, when there are intervals of the measurement-free evolution between the successive measurements.

We apply the equations using a concrete irreversible model of the measurement. The detector is modeled as a harmonic oscillator, initially being at the thermal equilibrium. The Lindblad-type master equation for the detectors density matrix is solved analytically. An equation for the probability of the jump between measured system's states during the measurement is obtained. From the used model it follows that the increase of the detector's temperature leads to the enhancement of the quantum Zeno or quantum anti-Zeno effects.

Another model of the detector is a two level system interacting with the environment.

The influence of the environment is taken into account using quantum trajectory method. The quantum trajectories produced by stochastic simulations show the probabilistic behavior exhibiting the collapse of the wave-packet in the measured system, although the quantum jumps were performed only in the detector. Both quantum Zeno and anti-Zeno effects were demonstrated for the measured two level system and for the decaying system. The results of the numerical calculations are compared with the analytical expressions for the decay rate of the measured system. A good agreement of the numerical results with the analytical estimates of the decay rates of the measured system shows that the particular model of the detector is not important, since the decay rates mostly depend only on one parameter, i.e., the duration of the measurement.

The generalization of the theoretical analysis of the time problem in quantum mechanics and weak measurements are presented. The tunneling time problem is a part of this more general problem. The problem of time is solved adapting the weak measurement theory to the measurement of time. In this model expression for the duration when the arbitrary observable χ has the certain value is obtained. This result is in agreement with the known results for the dwell time in the tunneling time problem.

Further we consider the problem of the duration when the observable χ has the certain value with condition that the system is in the given final state. Our model of measurement allows us to obtain the expression of this duration as well. This expression has many properties of the corresponding classical time. However, such a duration not always has the reasonable meaning. It is possible to obtain the duration the quantity χ has the certain value on condition that the system is in a given final state only when the commutation condition is fulfilled. In the opposite case, there is a dependence in the outcome of the measurements on particular detector even in an ideal case and, therefore, it is impossible to obtain the definite value of the duration. When the commutation condition is not fulfilled, we introduce two quantities, characterizing the conditional time. These quantities are useful in the case of tunneling and we suppose that they can be useful also for other problems.

In order to investigate the tunneling time problem, we consider a procedure of time measurement, proposed by Steinberg. This procedure shows clearly the consequences of noncommutativity of the operators and the possibility of determination of the asymptotic time. Our model also reveals the Hartmann and Fletcher effect, i.e., for opaque barriers the effective velocity is very large because the contribution of the barrier region to the time is almost zero. We cannot determine whether this velocity can be larger than c because for this purpose one has to use a relativistic equation (e.g., the Dirac equation).

The definition of density of one sided arrivals is proposed. This definition is extended to quantum mechanics, using the concept of weak measurements by Aharonov *et al.*. The proposed procedure is suitable for free particles and for particles subjected to an external potential, as well. However, this procedure gives no unique expression for the arrival time probability distribution.

In analogy with the complex tunneling time, the complex arrival time “probability distribution” is introduced. It is shown that the proposed approach imposes an inherent limitation on the resolution time of the arrival time determination.

Trumpos žinios apie doktorantą

Vardas: Julius

Pavardė: Ruseckas

Gimimo data: 1978 07 13

El. paštas: ruseckas@itpa.lt

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

- | | |
|--------------------|--|
| 1996 – 2000 | Vilniaus universitetas, Fizikos fakultetas, Bakalauro kvalifikacinis laipsnis. |
| 2000 – 2002 | Vilniaus universitetas, Fizikos fakultetas, Magistro kvalifikacinis laipsnis. |
| 2002 – 2006 | Doktorantūra Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institute. |

Julius Ruseckas

MATAVIMO MODELIAI KVANTINIŲ ZENONO IR ANTI-ZENONO EFEKTŲ APRAŠYMIUI IR LAIKO KVANTINĖJE
MECHANIKOJE APIBRĖŽIMUI

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, fizika (02 P), matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė
mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika (190 P)

Tiražas 70 egz. Užsakymo Nr. 1625
Spausdino UAB „Mokslo aidai“
A. Goštauto g. 12, 01108 Vilnius