Bell'o nelygybė

Julius Ruseckas

Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institutas

Sausio 14, 2013

Apie ką kalbėsime

- Tema yra koreliacijos klasikinėje ir kvantinėje fizikoje.
- Preitą kartą nagrinėjome koreliacijas, kai yra matuojami vienas arba du dydžiai.
- Kai matuojamas vienas dydis, koreliacijos klasikinėje ir kvantinėje fizikoje elgiasi taip pat.
- Kai matuojami du dydžiai, koreliacijos klasikinėje ir kvantinėje fizikoje elgiasi taip pat jei kvantinėje fizikoje įvedame paslėptus kintamuosius
- Dabar nagrinėsime kas bus kai yra matuojami trys dydžiai.

Dvi klasikinės dalelės, trys parametrai

Eksperimentas IV

- Turime daug pirštinių porų
- Kiekviena pirštinė gali būti raudona arba žalia, taip pat gali būti pažymėta apskritimu arba kvadratu. Vienoje poroje pirštinės yra skirtingų spalvų ir pažymėtos skirtingomis figūromis
- Koreliacija tarp pirštinių atsiranda gamybos metu
- Iš kiekvinos poros viena atsitiktinai parinkta pirštinė paliekama Žemėje, kita nusiunčiama į Kentauro Alfą
- Laborantai Žemėje ir Kentauro Alfoje matuoja vieną iš trijų parametrų (formą, spalvą arba ženklą). Iš matavimo rezultatų suskaičiuojamos koreliacijos

Eksperimentas IV

Jei $N(\mathrm{K}, \mathrm{Z})$ yra žalių pirštinių kairei rankai skaičius mūsų ansamblyje, $N(\mathrm{K}, \bigcirc)$ yra pirštinių kairei rankai pažymėtų apskritimu skaičius, o $N(\mathrm{Z}, \square)$ yra žalių pirštinių pažymėtų kvadratu skaičius, tai nesunku pastebėti kad

$$N(\mathrm{Z}, \square) \geq \left| N(\mathrm{K}, \mathrm{Z}) - N(\mathrm{K}, \bigcirc) \right|$$

Eksperimentas IV

- Tegu kairei rankai, žaliai spalvai ir apskritimui priskiriame vertę $+1$, o dešinei rankai, raudonai spalvai ir kvadratui vertę -1
- Koreliaciją tarp pirštinės Žemėje parametro x ir pirštinės Kentauro Alfoje parametro y žymėsime $C(x, y)$
- Tada turime kad
$$C(x, x) = -1$$
- Koreliaciją galime išreikšti per pirštinių, pasižyminčių savybėmis $x = 1$ ir $y = 1$, skaičių:
$$C(x, y) = 1 \cdot \frac{N - N(x, y)}{N} + (-1) \cdot \frac{N(x, y)}{N} = 1 - 2\frac{N(x, y)}{N}$$
kur N yra pirštinių porų skaičius.

Eksperimentas IV

- Išreiškę pirštinių, pasižyminčių savybėmis $x = 1$ ir $y = 1$ skaičių per koreliaciją ir pasinaudoję anksčiau užrašyta nelygybe pirštinių skaičiams galime gauti nelygybę koreliacijoms.
- Jei dydžiai a, b ir c nurodo kuriai rankai piršinė, jos spalvą bei jos ženklą, tai

$$1 + C(b, c) \geq \left| C(a, b) - C(a, c) \right|$$

Bendresnė situacija

- Nagrinėjame tris dydžius a, b, c
- Kiekvienas iš jų gali įgyti tik dvi reikšmes
- Toms reikšmėms priskiriame vertes $+1$ ir -1
- Turime daug dalelių porų, poros dalelės yra nutolusias viena nuo kitos
- Koreliacija tarp pirmos dalelės dydžio x_1 ir antros dalelės dydžio x_2 žymėsime $C(x_1, x_2)$
- Dalelių poros paruoštos taip kad

$$C(x, x) = -1$$

Prielaidos

1. Dalelės būseną nusako parametrų λ rinkinys
2. Lokalumas. Dydžio x matavimo pirmai dalelei rezultatas priklauso tik nuo x ir λ: $F_1(x, \lambda)$. Jis negali priklausyti nuo to, kas daroma su antra dalele, nes pasirinkimai kokį dydį matuoti gali būti daromi atsitiktinai ir atskirti erdviškuoju intervalu.
   Taip pat kaip ir pirmai dalelei, antrai dalelei dydžio x matavimo rezultatas yra $F_2(x, \lambda)$.

Matematika

- Pagal koreliacijos apibrėžimą

$$C(x,y) = \sum_{\lambda} F_1(x,\lambda)F_2(y,\lambda)p(\lambda)$$

  kur $p(\lambda)$ yra tikimybė parametrams įgyti vertes λ
- Kadangi $C(x,x) = -1$, tai

$$F_2(x,\lambda) = -F_1(x,\lambda)$$

- Galime eliminuoti funkciją F_2:

$$C(x,y) = -\sum_{\lambda} F_1(x,\lambda)F_1(y,\lambda)p(\lambda)$$

Matematika

Trims dydžiams a, b, c turime

$$C(a,b)-C(a,c) = -\sum_{\lambda}\left[F_1(a,\lambda)F_1(b,\lambda)-F_1(a,\lambda)F_1(c,\lambda)\right]p(\lambda)$$

Kadangi $F_1(b,\lambda)^2 = 1$, galime pertvarkyti:

$$C(a,b)-C(a,c) = -\sum_{\lambda}F_1(a,\lambda)F_1(b,\lambda)\left[1-F_1(b,\lambda)F_1(c,\lambda)\right]p(\lambda)$$

Kadangi $F_1(a,\lambda)F_1(b,\lambda) = \pm 1$, $[1 - F_1(b,\lambda)F_1(c,\lambda)]p(\lambda) \geq 0$, tai

$$\left|C(a,b) - C(a,c)\right| \leq \sum_{\lambda}\left[1 - F_1(b,\lambda)F_1(c,\lambda)\right]p(\lambda)$$

Matematika

Trims dydžiams a, b, c turime

$$C(a,b)-C(a,c) = -\sum_{\lambda}\left[F_1(a,\lambda)F_1(b,\lambda)-F_1(a,\lambda)F_1(c,\lambda)\right]p(\lambda)$$

Kadangi $F_1(b,\lambda)^2 = 1$, galime pertvarkyti:

$$C(a,b)-C(a,c) = -\sum_{\lambda}F_1(a,\lambda)F_1(b,\lambda)\left[1-F_1(b,\lambda)F_1(c,\lambda)\right]p(\lambda)$$

Kadangi $F_1(a,\lambda)F_1(b,\lambda) = \pm 1$, $[1 - F_1(b,\lambda)F_1(c,\lambda)]p(\lambda) \geq 0$, tai

$$\left|C(a,b) - C(a,c)\right| \leq \sum_{\lambda}\left[1 - F_1(b,\lambda)F_1(c,\lambda)\right]p(\lambda)$$

Matematika

Trims dydžiams a, b, c turime

$$C(a,b)-C(a,c) = -\sum_{\lambda}\left[F_1(a,\lambda)F_1(b,\lambda)-F_1(a,\lambda)F_1(c,\lambda)\right]p(\lambda)$$

Kadangi $F_1(b,\lambda)^2 = 1$, galime pertvarkyti:

$$C(a,b)-C(a,c) = -\sum_{\lambda} F_1(a,\lambda)F_1(b,\lambda)\left[1-F_1(b,\lambda)F_1(c,\lambda)\right]p(\lambda)$$

Kadangi $F_1(a,\lambda)F_1(b,\lambda) = \pm 1$, $[1 - F_1(b,\lambda)F_1(c,\lambda)]p(\lambda) \geq 0$, tai

$$\left|C(a,b) - C(a,c)\right| \leq \sum_{\lambda}\left[1 - F_1(b,\lambda)F_1(c,\lambda)\right]p(\lambda)$$

Rezultatas

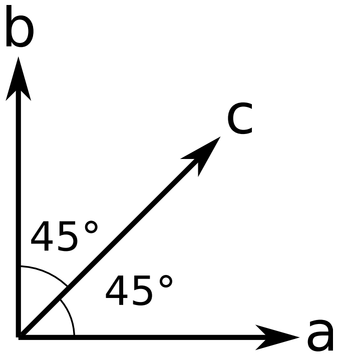
Bell'o nelygybė

$$\left|C(a,b) - C(a,c)\right| \leq 1 + C(b,c)$$

Eksperimentas V, kvantinis

- Turime daug vienodų sistemų talpinančių po dvi daleles
- Dalelės su sukiniu $1/2$
- Tegu sąveikos metu pasigamina būsena su pilnu sukiniu lygiu 0
- Po dalelių sąveikos jos atskiriamos ir viena paliekama Žemėje, kita nesutrikdant nusiunčiama į Kentauro Alfą
- Matuojame vieną iš trijų sukinio projekcijų S_a, S_b, S_c išilgai ašių a, b, c

Eksperimentas V



Ašis *a* sutampa su *x* ašimi, ašis *b* su *z* ašimi, ašis *c* sudaro 45 laipsnių kampą su *x* ir *z* ašimis.

Kvantmechaninis aprašymas

- Būsenos vektoriai $|+z\rangle$ ir $|-z\rangle$ yra tikriniai operatoriui S_z
- Tegu po sąveikos pasigamina dviejų dalelių būsena, aprašoma tokiu būsenos vektoriumi (pilnas sukinys lygus 0):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+z\rangle \otimes |-z\rangle - |-z\rangle \otimes |+z\rangle)$$

- Koreliacija yra apskaičiuojama pagal formulę

$$C(a,b) = \langle\psi|S_a \otimes S_b|\psi\rangle$$

Kvantmechaninis aprašymas

- Tegu (a_x, a_z) ir (b_x, b_z) yra vienetiniai vektoriai išilgai ašių a ir b. Tada

$$S_a = a_x S_x + a_z S_z\,, \qquad S_b = b_x S_x + b_z S_z$$

- Turime

$$\begin{aligned}\langle\psi|S_a \otimes S_b|\psi\rangle =& a_x b_x \langle\psi|S_x \otimes S_x|\psi\rangle + a_x b_z \langle\psi|S_x \otimes S_z|\psi\rangle \\ &+ a_z b_x \langle\psi|S_z \otimes S_x|\psi\rangle + a_z b_z \langle\psi|S_z \otimes S_z|\psi\rangle \\ =& - a_x b_x - a_z b_z\end{aligned}$$

- Taigi

$$C(a, b) = -\cos\widehat{ab}$$

Kvantmechaninis aprašymas

- Vadinasi, koreliacijos pagal kvantinę mechaniką yra tokios:

$$C(a,b) = 0\,, \qquad C(a,c) = C(b,c) = -0.707$$

- Gauname:

$$1+C(b,c) = 1-0.707 = 0.293 < |C(a,b)-C(a,c)| = 0.707$$

Kvantinė mechanika netenkina Bell'o nelygybės!

Kaip yra realybėje?

Eksperimentai rodo, kad gamtoje iš tiesų Bell'o nelygybės yra pažeidžiamos

Išvada

Vadinasi, prielaidos, padarytos išvedant Bello nelygybę, kvantinėje srityje yra neteisingos:

- arba nėra lokalumo
- arba tokie parametrai λ (paslėpti kintamieji) yra negalimi

Ačiū už dėmesį!